Mathematik
Erzbischöfliches Abendgymnasium
Bamberg

2022/2023

Inhaltsverzeichnis:

Kapitel 1: Stochastik / Grundlagen und Definitionen

(Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik)

Definition:

Ein math. Zufallsexperiment ist ein Experiment, bei dem alle möglichen Ausgänge grundsätzlich bekannt sind, das konkrete Eintreten eines bestimmten Ausganges aber nicht vorhergesagt werden kann. Die möglichen Ausgänge des Experiments werden Ereignisse (Bez.: große lateinische Buchstaben: A, B, C, …) genannt. Die grundlegenden Ereignisse heißen Elementarereignisse (Bez.: kleines griechisches Omega: ω). Die Menge aller Elementarereignisse heißt Ergebnismenge groß Omega Ω.

Beispiel 1:

ZE: „Werfen eines Würfels" ZE steht für Zufallsexperiment

[Ergebnisraum] $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

[Ereignis / Ergebnis] P = „geworfene Augenzahl ist eine Primzahl" $\mathrm{P} = \{2, 3, 5\}$

A = „geworfene Augenzahl ist gerade" $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$

E = „geworfene Augenzahl ist größer als Eins" $\mathrm{E} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Beispiel 2:

ZE: „zweimaliges Werfen eines Würfels"

$\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), \dots, (6; 5), (6; 6)\}$

Beispiel 3:

In einer Urne befinden sich vier weiße, drei gelbe und eine schwarze Kugel.

ZE: „Ziehen einer Kugel"

$\Omega = \{w, g, s\}$

Rückblick auf die Mengenlehre / Operationen auf Mengen:

Für ein ω aus der Menge Ω gilt die Schreibweise: $\omega \in \Omega$ (ω ist Element von …)

Für ein beliebiges Ereignis A gilt: $A \subset \Omega$ (A ist Teilmenge von …)

Elemente, die in der Teilmenge A und in der Teilmenge B liegen, bilden die sog. Schnittmenge von A und B … $A \cap B = S$ wobei gilt: $S \subset \mathrm{A}$ und zugleich $S \subset \mathrm{B}$

[Mengenoperatoren der Relation: $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$]

Elemente, die in der Teilmenge A oder in der Teilmenge B oder in beiden Mengen liegen, bilden die sog. Vereinigungsmenge von A und B … $A \cup B$

Mengen, die keine gemeinsamen Elemente besitzen ergeben beim Schnitt die sog. leere Menge (Symbol: $\{\quad\} = \emptyset$). Solche Mengen heißen auch disjunkt. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Verminderungsmenge A ohne B wird die Menge genannt, bei der aus A die Elemente der Schnittmenge entfernt werden … A\B.
Es gilt: $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) \cap (A \cap B) = \{\quad\} = \emptyset$

Als Komplementärmenge $\bar{A}$ wird die Menge bezeichnet, die entsteht, wenn man Ω um A vermindert … $\bar{A} = \Omega \backslash \mathrm{A}$. Es gilt: $A \cup \bar{A} = \Omega$. Die Komplementärmenge heißt in der Stochastik auch Gegenereignis!

Die Elementarereignisse und Ereignisse lassen sich zu Teilmengen von der Grundmenge Ω gruppieren. Dabei gilt: Es gibt die einelementigen Mengen, die zweielementigen Mengen, die dreielementigen Mengen … Die Menge aller Teilmengen aus Ω heißt Potenzmenge $\wp(\Omega)$ von Omega.

Die Anzahl der Elemente einer Menge Ω heißt Mächtigkeit oder Kardinalität von Ω, kurz … $\#(\Omega)$. Die Potenzmenge besitzt die Mächtigkeit: $\#\wp(\Omega) = 2^{\#(\Omega)}$. Analog wird verwendet … $|\wp(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$ (Betrag einer Menge ist die Mächtigkeit der Menge).

Wird ein Experiment mehrfach (n-fach) nacheinander durchgeführt, so spricht man von zusammengesetzten Zufallsexperimenten. Es liegen auch dann zusammengesetzte ZE vor, wenn die Teilexperimente verschieden sind. Der Ergebnisraum $\Omega_{ges} = \Omega_1 \underbrace{\otimes}_{\substack{direktes \\ Produkt}} \Omega_2 \otimes \Omega_3 \otimes \Omega_4 \dots \otimes \Omega_n$.

Der Betrag eines zusammengesetzten ZE berechnet sich durch …

$$|\Omega_{ges}| = |\Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \Omega_3 \otimes \Omega_4 \dots \otimes \Omega_n| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdot |\Omega_3| \cdot \dots \cdot |\Omega_n|$$

Die Ergebnismenge von mehrstufigen / zusammengesetzten ZE können mit Hilfe von Baumdiagrammen beschrieben werden!

Beispiel 4:

ZE: „Werfen eines Würfels“

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

P = „geworfene Augenzahl ist eine Primzahl“ $\quad \mathrm{P} = \{2, 3, 5\}$

A = „geworfene Augenzahl ist gerade“ $\quad \mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$

$A \cap P = \{2\}$

$A \cup P = \{2, 3, 4, 5, 6\} = E_{zu\ Beispiel\ 1}$

$A \backslash P = \{4, 6\}$

$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$|\Omega| = 6$

$$\wp(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \dots, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \dots, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \dots, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \dots, \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$|\wp(\Omega)| = 2^6 = 64$

Beispiel 5:

Zusammengesetztes ZE

Heinz und Willi spielen folgendes Spiel (ZE):

ZE$_1$: „Es wird eine Münze geworfen“ $\quad \Omega_1 = \{k, z\} \rightarrow |\Omega_1| = 2$

ZE$_2$: „Es wird eine Kugel aus einer Urne gezogen, in der sich eine rote, eine blaue und eine gelbe Kugel befinden“ $\quad \Omega_2 = \{r, b, g\} \rightarrow |\Omega_2| = 3$

ZE$_3$: „Es wird eine von vier Königen (Schafkopfblatt) gezogen“ $\quad \Omega_3 = \{K_S, K_H, K_B, K_E\} \rightarrow |\Omega_3| = 4$

$$\Omega_{ges} = \left\{ \begin{matrix} \underbrace{(k, r, K_S)}_{\substack{Ergebistupel \\ 3-Tupel}}, (k, r, K_H), (k, r, K_B), (k, r, K_E) \\ (k, b, K_S), (k, b, K_H), (k, b, K_B), (k, b, K_E) \\ (k, g, K_S), (k, g, K_H), (k, g, K_B), (k, g, K_E) \\ (z, r, K_S), (z, r, K_H), (z, r, K_B), (z, r, K_E) \\ (z, b, K_S), (z, b, K_H), (z, b, K_B), (z, b, K_E) \\ (z, g, K_S), (z, g, K_H), (z, g, K_B), (z, g, K_E) \end{matrix} \right\} \rightarrow |\Omega_{ges}| = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Kapitel 2: Zählmethodik / Abzähltechniken

Permutationen:

Eine Menge Ω bestehe aus n unterscheidbaren Elementen ($n \in IN_0$). Die Anzahl der verschiedenen (unterscheidbaren) Reihenfolgen dieser Elemente berechnet sich durch …

n	·	**(n-1)**	·	**(n-2)**	·	**(n-3)**	…	**(n-k+1)**	…	**3**	·	**2**	·	**1**	=	**n!**
1 Schub-lade		2 Schub-lade		3 Schub-lade		4 Schub-lade		k Schub-lade		n-2 te Schub-lade		n-1 te Schub-lade		n Schub-lade		

n! heißt n Fakultät …

Beispiel:

Auf wie viele unterscheidbare Arten lassen sich 7 Lieder auf eine CD brennen?

Lsng.: 7! = 5040

r-Permutationen:

Eine Menge Ω bestehe aus n unterscheidbaren Elementen ($n \in IN_0$). Die Anzahl der verschiedenen (unterscheidbaren) Reihenfolgen von r ($r \leq n$; $r \in IN$) dieser Elemente berechnet sich durch …

n	·	**(n-1)**	·	**(n-2)**	·	**(n-3)**	…	**(n-4)**	…	**(n-r+1)**	=	$\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$	**= nPr**
1 Schub-lade		2 Schub-lade		3 Schub-lade		4 Schub-lade		5 Schub-lade		r Schub-lade			

Beispiel 1:

22 Pferde nehmen am Rennen teil. Berechne die verschiedenen Möglichkeiten für die ersten drei Plätze.

n = 22; r = 3;

$$\frac{\mathbf{22}!}{(\mathbf{22}-\mathbf{3})!} = \mathbf{22}\boldsymbol{P}\mathbf{3} = \mathbf{9240}$$

Beispiel 2:

Lotterie „Once“: Wette auf die ersten 10 Bestplazierten in der Tour de France mit Berücksichtigung der Reihenfolge …

Für die ersten Plätze kommen 25 der 194 Starter in Frage. n = 25; r = 10;

$$\frac{\mathbf{25}!}{(\mathbf{25}-\mathbf{10})!} = \mathbf{25}\boldsymbol{P}\mathbf{10} = \mathbf{11.861.676.288.000}$$

Beispiel 3:

Von 49 Teilnehmerinnen an einem Schönheitswettbewerb, werden die ersten 6 Teilnehmerinnen ausgezeichnet. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl? n = 49; r = 6;

$$\frac{\mathbf{49}!}{(\mathbf{49}-\mathbf{6})!} = \mathbf{49}\boldsymbol{P}\mathbf{6} = \mathbf{10.068.347.520}$$

r-Kombination:
Eine Menge Ω bestehe aus n unterscheidbaren Elementen (n ∈ $\mathbb{N}_0$). Die Anzahl der verschiedenen (nicht unterscheidbaren) Reihenfolgen von r (r ≤ n; r ∈ IN) dieser Elemente berechnet sich durch …

$$(\boldsymbol{r-Kombination})\cdot \boldsymbol{r}! = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \boldsymbol{r-Permutation}$$

$$(\boldsymbol{r-Kombination})\cdot \boldsymbol{r}! = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$$

$$(\boldsymbol{r-Kombination}) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \boldsymbol{nCr}$$

Beispiel:

22 Pferde nehmen am Rennen teil. Berechne die verschiedenen Möglichkeiten für die ersten drei Plätze. Die Reihenfolge der Pferde soll dabei keine Rolle spielen.

n = 22; r = 3;

$$\binom{\mathbf{22}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{22!}}{\mathbf{3!}\cdot(\mathbf{22}-\mathbf{3})!} = \mathbf{1540}$$

Beispiel 2:

Ziehung der Lottozahlen (6 aus 49). Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl von 6 Zahlen aus den ersten 49 natürlichen Zahlen? n = 49; r = 6;

$$\binom{\mathbf{49}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{49!}}{\mathbf{6!}\cdot(\mathbf{49}-\mathbf{6})!} = \boldsymbol{49C6} = \mathbf{13.983.816}$$

Beispiel 3:

Für eine Dr. Oetker Pizza werden insgesamt 4 Zutaten benötigt. Insgesamt stehen 9 Zutaten zur Wahl. Wie viele Pizzasorten könnte Dr. Oetker in den Handel bringen? n = 9; r = 4;

$$\binom{\mathbf{9}}{\mathbf{4}} = \boldsymbol{9C4} = \mathbf{126}$$

Kombinationen mit Wiederholungen:
Die Anzahl der unterscheidbaren Anordnungen von n Elementen einer n - elementigen Menge, bei der jeweils k_1, k_2, k_3,… Elemente identisch sind. Nebenbedingung …: $k_1 + k_2 + k_3 + … = n$.

Formel:

$$\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot ...}$$

Beispiel:

In einer Kiste befinden sich 3 blaue, zwei rote und zwei gelbe Viererlegosteine. Auf wie viele unterscheidbare Arten lassen sich Türmchen aus diesen Steinen bauen?

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210$$

Beispiel 2:

Wie viele verschiedene Wörter lassen sich aus dem Wort Mississippi bilden (die Wörter müssen nicht unbedingt einen Sinn ergeben).

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 34650$$

Abschlussaufgabe:

Melanie Humel nimmt an einer Podiumsdiskussion mit drei Pressevertretern, zwei Ökoaposteln und fünf Ayurvedatanten teil. Zum abschließenden Foto sollen sich die Diskussionsteilnehmer und Diskussionsteilnehmerinnen in einer Reihe aufstellen. Aus wie viele Arten ist dies möglich, wenn …

a) … alle Personen unterscheidbar sind?
b) … Melanie Humel in der Mitte stehen soll?
c) … die Personen geschlechtergetrennt von der Humel stehen sollen (Humel in der Mitte)?
d) … Männlein und Weiblein abwechselnd stehen sollen?
e) … nach Berufsgruppen sortiert stehen sollen?

Lsng.:

a) 11! = 39.916.800
b) 10! = 3.628.800
c) 5!·5! + 5!·5! = 28.800 oder … 2·5!·5! = 28.800
d) $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1}$
   6·5·5·4·4·3·3·2·2·1·1 = 6! ·5!
e) 4! = 24

Kapitel 3: Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Definitionen:

1. Ein Zufallsexperiment ZE werde n – mal nacheinander ausgeführt. Die Anzahl $k(\omega)$, wie oft ein Elementarereignis ω des Experiments ZE eintritt heißt absolute Häufigkeit $h_a(\omega)$ des Elementarereignisses.
   Beispiel:
   Ein Würfel werde 60 mal geworfen …

ω	1	2	3	4	5	6
$h_a(\omega)$	12	7	6	14	9	12

2. Der Quotient aus $h_a(\omega)$ durch die Summe aller $h_a(\omega)$ (entspricht der Wiederholungsrate n) heißt relative Häufigkeit $h_r(\omega)$ des Elementarereignisses. Relative Häufigkeiten lassen sich auch in Prozentwerten angeben.

$$h_r(\omega) = \frac{h_a(\omega)}{n} = 100 \cdot \frac{h_a(\omega)}{n} \ \%$$

   Beispiel:
   Ein Würfel werde 60 mal geworfen …

ω	1	2	3	4	5	6	Summe
$h_a(\omega)$	12	7	6	14	9	12	60
$h_r(\omega)$	$\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$	$\frac{14}{60} = \frac{7}{30}$	$\frac{9}{60} = \frac{3}{20}$	$\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$	1
$h_r(\omega)$	20,00 %	11,67 %	10,00 %	23,33 %	15,00 %	20,00 %	100 %

3. Die relative Häufigkeit eines (Elementar-) Ereignisses (ω) A heißt auch empirische Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$ des (Elementar-) Ereignisses (ω) A.
4. Die mathematische Wahrscheinlichkeit $P_L(\omega)$ für gleichwahrscheinliche Elementarereignisse heißt Laplace-Wahrscheinlichkeit. Sie gilt für sog. faire Spiele und berechnet sich durch …

$$P_L(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

   Beispiel: ZE: „Werfen eines Würfels“

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \rightarrow |\Omega| = 6 \quad P_L(1) = P_L(2) = P_L(3) = \cdots = P_L(6) = \frac{1}{6}$$

   Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A berechnet sich durch $P_L(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, und damit …

   A = „geworfene Augenzahl ist gerade“. $A = \{2, 4, 6\} \rightarrow P_L(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\ \%$

5. Die Tatsache, dass bei der Durchführung eines ZE´s bei hinreichender Wiederholungszahl n die empirische Wahrscheinlichkeit sich immer genauer an die Laplace-Wahrscheinlichkeit annähert, heißt (empirisches) Gesetz der großen Zahl (schwache und starke Variante).
6. **Der Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Kolmogorow (Axiome von Kolmogorow …)**
   Eine Funktion heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn gilt …

$$i) \quad 0 \leq P(\omega_i)_{i \in IN} \leq 1$$
$$ii) \quad P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = P(\{\ \}) = 0$$
$$iii) \quad P(\Omega) = \sum_{i \in IN} P(\omega_i) \to P(\mathrm{A} \subset \Omega) = \sum_{\substack{i \in IN \\ \omega_i \in A}} P(\omega_i)$$
$$iii) \quad P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}), \qquad wenn \;\; A \cap B = \{\ \}$$
$$iii)^* \quad P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(A \cap B)$$

Übungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff / Mehrstufige Zufallsexperimente

Baumdiagramme und Pfadregeln

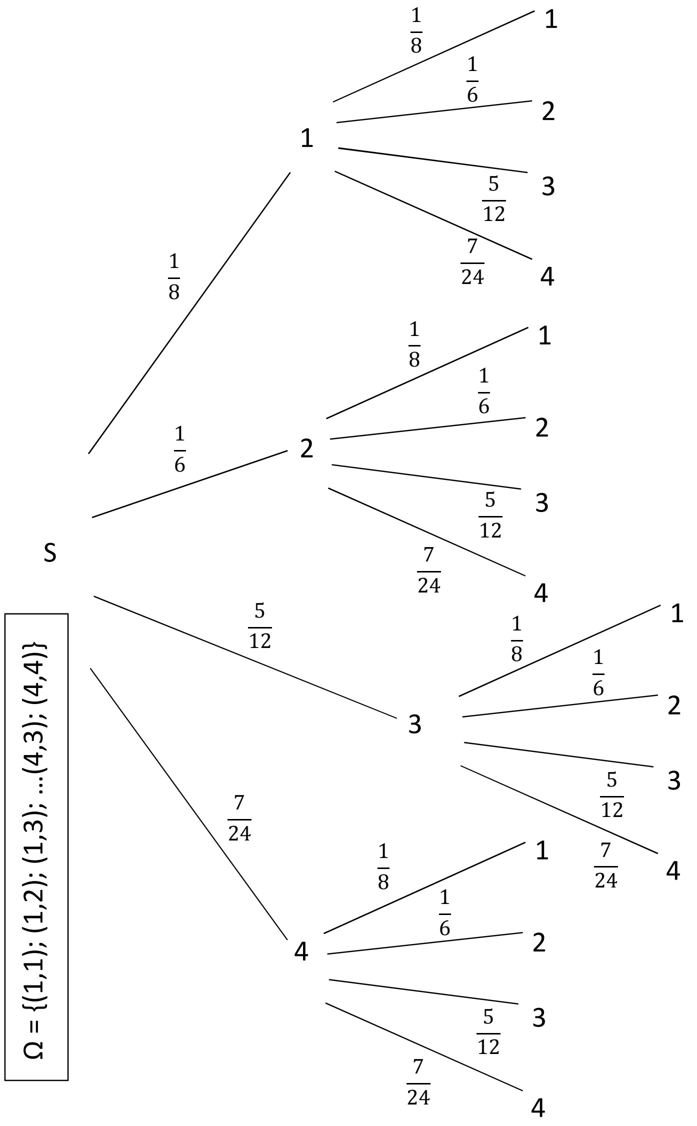
Beispiel 1:

Ein Glücksrad trage die Zahlen 1, 2, 3 und 4. Der zur 1 gehörende Sektor besitzt den Mittelpunktswinkel 45°. Der zur 2 gehörende Sektor den Winkel 60°, der Winkel 150° gehört zur 3, der Rest des Glücksrades gehört zur 4.

a) Gib die Wahrscheinlichkeiten an, die zu den jeweiligen Sektoren gehören!

ω_i	1	2	3	4
$P(\omega_i)$	0,125 = 12,5%	0,166 = 16,7%	0,417 = 41,7%	0,292 = 29,2%
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{24}$

b) Das Glücksrad wird zweimal nacheinander gedreht. Ermittle den Ergebnisraum und bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.



$$P(1,1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$

$$P(1,2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}$$

$$P(1,3) = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{96}$$

$$P(1,4) = \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{24} = \frac{7}{192}$$

$$P(2,1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$$

$$P(2,2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

...

$$P(4,4) = \frac{7}{24} \cdot \frac{7}{24} = \frac{49}{576}$$

Zu jedem Ereignis eines mehrstufigen Zufallsexperimentes gehört ein spezieller Pfad im entsprechenden Baumdiagramm!

Pfadregel 1:

Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses A eines mehrstufigen Zufallsexperiments berechnet sich durch das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten längs des Pfades das zum Elementarereignis A im zugehörigen Baumdiagramm passt.

c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse …

a. A: „Es wird mindestens einmal die Drei gedreht“
b. B: „Es wird genau einmal die Zwei gedreht“
c. C: „Die Summe der gedrehten Zahlen ist größer als Fünf“

a. A: „{(1,3); (2,3); (3,3); (4,3); (3,1); (3,2); (3,4)}“

$$P(A) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{5}{12} = \frac{95}{144}$$

b. B: „{(1,2); (2,1); (2,3); (3,2); (2,4); (4,2)}“

$$P(B) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

c. C: „{(4,2); (4,3); (2,4); (3,4); (3,3); (4,4)}“

$$P(B) = 2 \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{7}{24} \cdot \frac{7}{24} = \frac{115}{192}$$

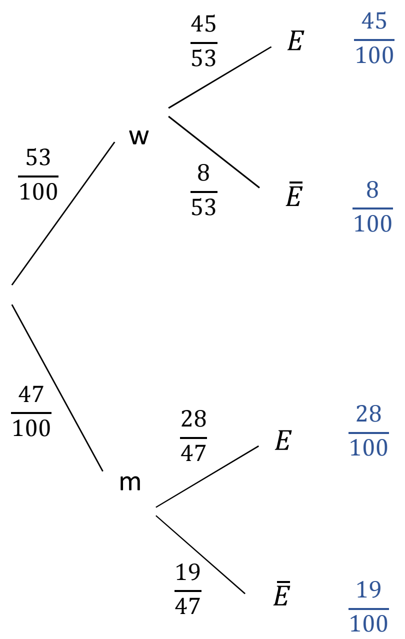
Pfadregel 2:

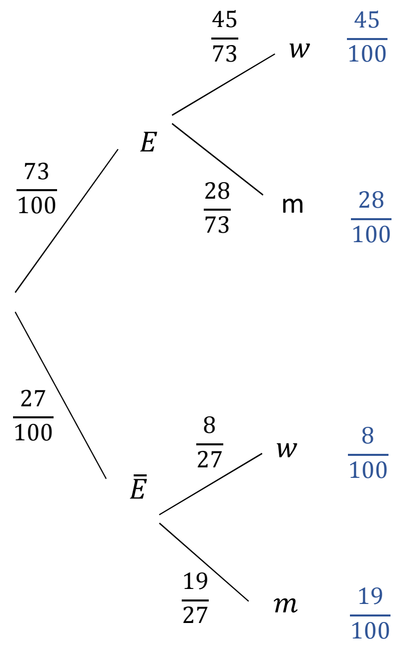
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A berechnet sich durch die Summe aller Elementarereignisse, welche die Bedingung der Ereignisbeschreibung erfüllen

Kapitel 4: Baumdiagramme empirischer Zufallsexperimente

Beispiel 1:

Von 100 Personen sind 47 männlich und 53 weiblich. 28 Männer geben an, gerne Essiggurken zu essen. Bei den Frauen sind es 45, die Essiggurken lieben. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse?





Eintrag der Wahrscheinlichkeiten ist insbesondere in eine sog. Vierfeldertafel möglich …

Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten …

Allgemeine Form

	E	$\bar{E}$	$\sum$
w	$\|w \cap E\|$	$\|w \cap \bar{E}\|$	$\|w\|$
$m = \bar{w}$	$\|m \cap E\|$	$\|m \cap \bar{E}\|$	$\|m\|$
$\sum$	$\|E\|$	$\|\bar{E}\|$	$\|w + m\| = \|E + \bar{E}\|$

… für das Beispiel …

	E	$\bar{E}$	$\sum$
w	45	8	53
$m = \bar{w}$	28	19	47
$\sum$	73	27	100

Vierfeldertafel der relativen Häufigkeiten (empirische Wahrscheinlichkeit) …

Allgemeine Form

	E	$\bar{E}$	$\sum$
w	$P(w \cap E)$	$P(w \cap \bar{E})$	$P(w)$
$m = \bar{w}$	$P(m \cap E)$	$P(m \cap \bar{E})$	$P(m)$
$\sum$	$P(E)$	$P(\bar{E})$	1

… für das Beispiel …

	E	$\bar{E}$	$\sum$
w	0,45	0,08	0,53
$m = \bar{w}$	0,28	0,19	0,47
$\sum$	0,73	0,27	1

Beispiel 2:

Am Samstag um 3.00 Uhr findet eine Razzia im Domstübla statt. Von 96 anwesenden Personen sind 64 weiblich. 32 der Frauen sind deutlich alkoholisiert. Die Wahrscheinlichkeit einen betrunkenen Mann zu kontrollieren beträgt zu diesem Zeitpunkt 16,66%. Erstelle eine Vierfeldertafel zu der Razzia.

Absolut …

	A	$\bar{A}$	$\sum$
w	**32**	**32**	**64**
$\bar{w}$	**16**	**16**	**32**
$\sum$	**48**	**48**	**96**

Relativ …

	A	$\bar{A}$	$\sum$
w	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{2}{3}}$
$\bar{w}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$
$\sum$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{1}$

Aufgaben zur Vierfeldertafel

Aufgabe 1:

Der Apotheker Bertram Etrug (B. Etrug) verkauft grünes Brausepulver mit Waldmeister-Geschmack als neuartiges (sehr wirksames) Schmerzmittel. Eine Umfrage unter 104 zufällig ausgewählten Kundinnen und Kunden ergibt folgendes Ergebnis: Von den 56 Befragten Damen bestätigten 42 tatsächlich (bei guter Verträglichkeit) die schmerzlindernde Wirkung des „Medikaments“. 12 der befragten Herren gaben an keine Schmerzlinderung durch das Präparat erfahren zu haben!

Ein kritischer Kunde behauptet, dass das „Schmerzmittel“ vom B. Trug bei Männern nicht so gut wirkt, wie bei Frauen. Überprüfen Sie diese Behauptung, indem sie die Ereignisse „Testperson ist männlich“ und „Das „Schmerzmittel“ wirkt“ auf stochastische Unabhängigkeit prüfen. Erstellen Sie insbesondere auch eine Vierfeldertafel!

Hinweis: *Die Angabe der Einzelwahrscheinlichkeiten der Vierfeldertafel als Bruchzahlen ist empfehlenswert!*

Absolut …

	S	$\bar{S}$	$\sum$
w	42	14	56
$\bar{w}$	36	12	48
$\sum$	78	26	104

Relativ …

	S	$\bar{S}$	$\sum$
w	$\frac{21}{52}$	$\frac{7}{52}$	$\frac{7}{13}$
$\bar{w}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{6}{13}$
$\sum$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$P(\bar{w}) \cdot P(S) = P(\bar{w} \cap S)$$

$$\frac{6}{13} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{26} \quad (w)$$

Kapitel 5: Stochastische Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition:

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt …

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Bemerkung:

Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, dann auch alle anderen Ereigniskombinationen der entsprechenden Vierfeldertafel!

Aufgabe 2:

Bei einem regelmäßigen Besuch der Grabstätte des altägyptischen Tempelpriesters Impotenep wird den Ausdünstungen der Grabkammer eine potenzsteigernde Wirkung bei Männern nachgesagt. Ein Ärzteteam um den albanisch-amerikanischen Arzt und Medizinnobelpreisträgers Ferid Murad gelang es schließlich, geringe Mengen von Stickstoffmonoxid in der Grabkammerluft nachzuweisen; dieses Molekül trägt wesentlich zur Aktivierung des Enzyms Guanylatzyklase (Regulierung und Unterstützung des Herz-Kreislaufsystems) bei. Diese Entdeckung führte zu der im Folgenden beschriebenen Klinikstudie:

512 Männer wurden an fünf aufeinanderfolgenden Tagen jeweils 15 Minuten der Grabkammeratmosphäre ausgesetzt. Bei 320 der Teilnehmer wurde (ohne deren Wissen) das Stickstoffmolekül durch ein spezielles Neutralisierungsverfahren ausgefiltert. Insgesamt berichteten 208 Teilnehmer von einem deutlich verbesserten Liebesleben. 96 Männer, die der ungefilterten Luft ausgesetzt waren konnten keine Veränderung in ihrem Sexleben feststellen.

Überprüfen Sie diese Schlussfolgerung des Ärzteteams, ein regelmäßiger Besuch der Grabkammer steigere tatsächlich die Potenz, auf ihre Stichhaltigkeit. Geben Sie insbesondere auch die zur Studie passende Vierfeldertafel an!

Absolut …

	m	$\overline{m}$	$\sum$
vl	96	112	208
$\overline{vl}$	96	208	304
$\sum$	192	320	512

Relativ …

	m	$\overline{m}$	$\sum$
vl	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{13}{32}$
$\overline{vl}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{19}{32}$
$\sum$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	1

Stochastische Unabhängigkeit:

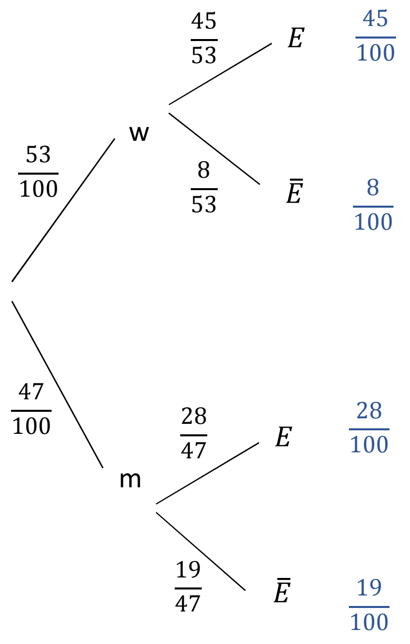
$$P(vl) \cdot P(m) = P(vl \cap m)$$

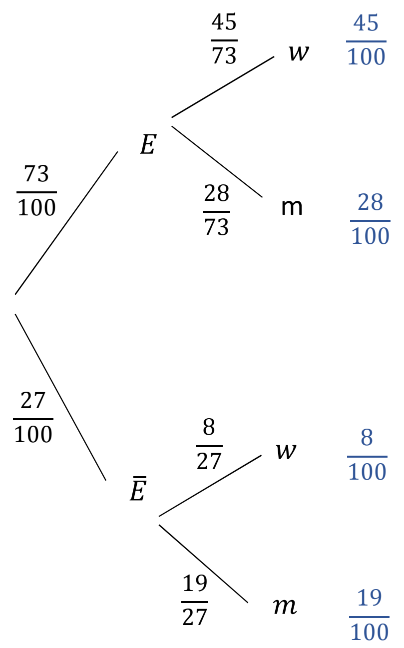
$$\frac{13}{32} \cdot \frac{3}{8} = \frac{39}{265} \neq \frac{3}{16}$$

d.h. die Ereignisse sind tatsächlich stochastisch abhängig!

Ergänzung zu Beispiel 1:

Von 100 Personen sind 47 männlich und 53 weiblich. 28 Männer geben an, gerne Essiggurken zu essen. Bei den Frauen sind es 45, die Essiggurken lieben. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse?





Eintrag der Wahrscheinlichkeiten ist insbesondere in eine sog. Vierfeldertafel möglich …

Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten …

Absolute Häufigkeiten

	E	$\bar{E}$	$\sum$
w	45	8	53
$m = \bar{w}$	28	19	47
$\sum$	73	27	100

Relative Häufigkeiten

	E	$\bar{E}$	$\sum$
w	0,45	0,08	0,53
$m = \bar{w}$	0,28	0,19	0,47
$\sum$	0,73	0,27	100

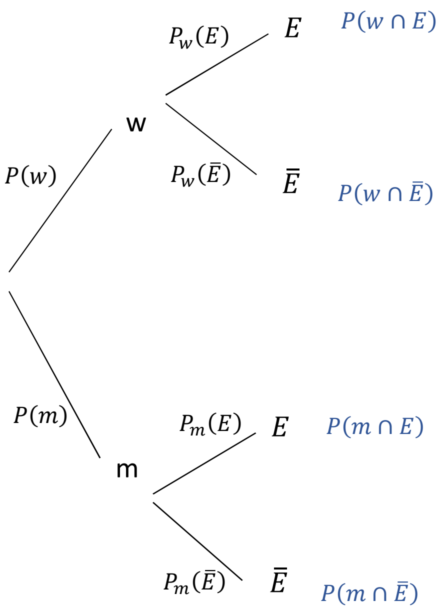
Stochastische Unabhängigkeit:

$$P(w) \cdot P(E) = P(w \cap E)$$

$$\frac{53}{100} \cdot \frac{73}{100} = \frac{3869}{10000} = 0{,}3869 \neq 0{,}45 = \frac{45}{100}$$

d.h. die Ereignisse sind tatsächlich stochastisch abhängig!

Bedingte Wahrscheinlichkeit



Die sog. Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_w(E)$ berechnet sich durch …

$$P(w) \cdot P_w(E) = P(w \cap E)$$

$$\boldsymbol{P_w(E) = \frac{P(w \cap E)}{P(w)}}$$

Dechant – Formulierung:

$P_w(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E unter der sicheren Kenntnis, dass das Ereignis w bereits eingetreten ist.

Offizielle – Formulierung:

$P_w(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E unter der Hypothese (Annahme), dass das Ereignis w bereits eingetreten ist.

$$P_w(E) = \frac{P(w \cap E)}{P(w)} = \frac{0{,}45}{0{,}53} \approx 0{,}85$$

Beachte:

Die Zwei Ereignisse w und E wären genau dann stochastisch unabhängig, wenn

$$P_w(E) = P(E)$$

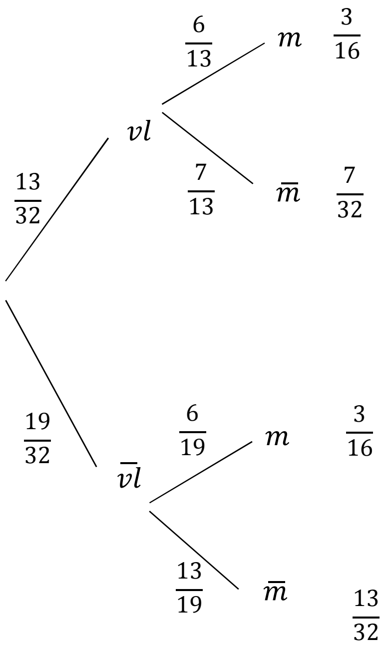
Denn …

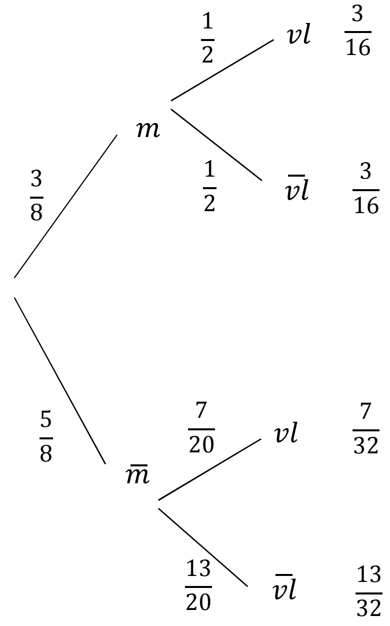
$$P(w) \cdot \underbrace{P_w(E)}_{P(E)} = P(w \cap E)$$

$$P(w) \cdot P(E) = P(w \cap E)$$

Generiere einen Baum aus …

	m	$\overline{m}$	$\sum$
vl	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{13}{32}$
$\overline{vl}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{19}{32}$
$\sum$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	1





Beachte:

Die Zwei Ereignisse vl und m wären genau dann stochastisch unabhängig, wenn

$$P_{vl}(m) = P(m)$$

Denn …

$$P(vl) \cdot \underbrace{P_{vl}(m)}_{P(m)} = P(vl \cap m)$$

$$P(vl) \cdot P(m) = P(vl \cap m)$$

Beachte:

Die Zwei Ereignisse m und vl wären genau dann stochastisch unabhängig, wenn

$$P_m(vl) = P(vl)$$

Denn …

$$P(m) \cdot \underbrace{P_m(vl)}_{P(vl)} = P(m \cap vl)$$

$$P(m) \cdot P(vl) = P(m \cap vl)$$

Beachte:

Zwei Ereignisse A und B sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn

$$P_A(B) = P(B)$$

Denn …

$$P(A) \cdot \underbrace{P_A(B)}_{P(B)} = P(A \cap B)$$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Aufgaben zur Vierfeldertafel

Aufgabe 1:

Ergänzen Sie die folgende Vierfeldertafel und zeigen Sie, dass die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig voneinander sind!

	B	$\bar{B}$	$\sum$
A	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{3}{7}$
$\bar{A}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{4}{7}$
$\sum$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{42} = \frac{1}{14} \quad (w)$$

d.h.: A ist stochastisch unabhängig von B

Aufgabe 2:

2 Um die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen einen nur in den Tropen auftretenden Pilz zu untersuchen, wurde ein Experiment mit 150 Pflanzen durchgeführt. Dabei wurden 70 % der Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend alle 150 Pflanzen mit den Sporen des tropischen Pilzes besprüht.

Am Ende des Experiments war die Anzahl der unbehandelten Pflanzen ohne Pilzbefall dreimal so groß wie die Anzahl x der behandelten Pflanzen mit Pilzbefall. Insgesamt wurden 19 Pflanzen vom tropischen Pilz befallen.

Aus den 150 Pflanzen wird eine Pflanze zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

S: „Die Pflanze wurde mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt."

T: „Die Pflanze wurde vom tropischen Pilz befallen."

a) Bestimmen Sie x unter Zuhilfenahme einer Vierfeldertafel.

(zur Kontrolle: $x = 13$)

b) Berechnen Sie $P_S(T)$ und $P_{\bar{S}}(T)$ und begründen Sie, dass aus den Ergebnissen des Experiments nicht auf die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen den tropischen Pilz geschlossen werden kann.

Variante 1:

	S	$\bar{S}$	$\sum$
T	x	$45 - 3 \cdot x$	19
$\bar{T}$	$131 - 3 \cdot x$	$3 \cdot x$	131
$\sum$	105	45	150

Variante 2:

	S	$\bar{S}$	$\sum$
T	x	$19 - x$	19
$\bar{T}$	$105 - x$	$3 \cdot x$	131
$\sum$	105	45	150

$$19 - x + 3 \cdot x = 45$$

$$2 \cdot x = 26 \rightarrow \boldsymbol{x = 13}$$

b)

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{\frac{13}{150}}{\frac{105}{150}} = \frac{13}{150} \cdot \frac{150}{105} = \frac{13}{105} \approx 12{,}4\%$$

$$P_{\bar{S}}(T) = \frac{P(\bar{S} \cap T)}{P(\bar{S})} = \frac{6}{45} \approx 13{,}3\%$$

Die Abweichung der beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten ist zu gering um auf die Wirksamkeit des Mittels schließen zu dürfen!

Aufgaben zur Vierfeldertafel (Angaben siehe Arbeitsblätter)

Zu Aufgabe 1:

a)

Absolute Häufigkeiten

	A	$\bar{A}$	$\sum$
w	14	24	**38**
m	74	**2**	76
$\sum$	88	**26**	**114**

Relative Häufigkeiten

	A	$\bar{A}$	$\sum$
w	$\frac{7}{57}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{1}{3}$
m	$\frac{37}{57}$	$\frac{1}{57}$	$\frac{2}{3}$
$\sum$	$\frac{44}{57}$	$\frac{13}{57}$	1

b) Die Befindlichkeit ist geschlechterabhängig; die Männer saufen mehr als die Frauen, denn …

$$P(A) \cdot P(w) = \frac{44}{57} \cdot \frac{1}{3} = \frac{44}{171} \neq \frac{7}{57} = P(A \cap w)$$

Ist stoch. abhängig!

Zu Aufgabe 2:

	rgb	$\overline{rgb}$	$\sum$
w	0,0416	0,4784	0,5200
m	0,1104	0,3696	0,4800
$\sum$	0,1520	0,8480	1

$$P(m) \cdot P(rgb) = 0{,}4800 \cdot 0{,}1520 = 0{,}07296 \neq 0{,}1104 = P(m \cap rgb)$$

Es liegt eine stochastische Abhängigkeit vor!

	rgb	$\overline{rgb}$	$\sum$
w	4,16%	47,84%	52,00%
m	11,04%	36,96%	48,00%
$\sum$	15,20%	84,80%	100,00%

Zu Aufgabe 3:

$$P(W \cup K) = P(W) + P(K) - P(W \cap K)$$

$$78\% = 60\% + 45\% - P(W \cap K)$$

$$P(W \cap K) = 105\% - 78\% = 27\%$$

	K	$\overline{K}$	$\sum$
W	0,2700	0,3300	0,6000
$\overline{W}$	0,1800	0,2200	0,4000
$\sum$	0,4500	0,5500	1,0000

Wegen:

$$P(W) \cdot P(K) = 0{,}6 \cdot 0{,}45 = 0{,}27 = P(W \cap K)$$

Erfolgt der Einkauf in der Käseabteilung unabhängig vom Einkauf in der Wurstabteilung!

Abiturprüfung 2021 / PT B / Stochastik 2 / Aufgabe 3

Das Süßwarenunternehmen produziert auch zuckerreduzierte und vegane Fruchtgummis und bringt diese in entsprechend gekennzeichneten Tüten in den Handel.

Der Anteil der nicht als vegan gekennzeichneten Tüten ist dreimal so groß wie der Anteil der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind. 42 % der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind, sind zusätzlich auch als zuckerreduziert gekennzeichnet. Insgesamt sind 63 % der Tüten weder als vegan noch als zuckerreduziert gekennzeichnet.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

V: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als vegan gekennzeichnet."
R: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als zuckerreduziert gekennzeichnet."

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{R}$.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{V}}(R)$.

c) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1-P_{\overline{V}}(R)$ im Sachzusammenhang.

Zu a)

	V	$\bar{V}$	$\sum$
R	0,42x	3x-0,63	3,42x-0,63
$\bar{R}$	0,58x	0,63	0,58x+0,63
$\sum$	x	3x	1

	V	$\bar{V}$	$\sum$
R	0,105	0,12	0,225
$\bar{R}$	0,145	0,63	0,775
$\sum$	0,25	0,75	1

Zu b)

$$P_{\bar{V}}(R) = \frac{P(R \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} \rightarrow P_{\bar{V}}(R) = \frac{0{,}12}{0{,}75} = 0{,}16 = 16\%$$

Zu c) Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine nicht zuckerreduzierte Tüte handelt unter der Hypothese, dass diese Tüte nicht vegan ist!

Kapitel 6: Abschließende Übungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei das Zufallsexperiment ZE: „Werfen zweier Laplace – Würfel“.

a) Bestimmen Sie den Ergebnisraum des ZE unter der Annahme, dass beide Würfel unterscheidbar sind (z.B. durch die Farbe oder durch die Reihenfolge des Werfens).
b) Bestimmen Sie den Ergebnisraum des ZE unter der Annahme, dass beide Würfel nicht unterscheidbar sind (z.B. dieselbe Farbe oder durch gleichzeitiges Werfen).
c) Untersuchen Sie die Ereignisse hinsichtlich der Augensumme der beiden Würfel.

Lösung:

Zu a)

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Beachte:

$$P\big((1;1)\big) = P\big((2;1)\big) = \cdots = P\big((6;6)\big) = \frac{1}{36}$$

Zu b)

Ω = {(1,1),
(2,1), (2,2),
(3,1), (3,2), (3,3),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Beachte:

$$P\big((1;1)\big) = P\big((2;2)\big) = \cdots = P\big((6;6)\big) = \frac{1}{36}$$

$$P\big((2;1)\big) = P\big((3;1)\big) = P\big((3;2)\big) = \cdots = P\big((6;5)\big) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Zu c)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(1,1)	(1,2) (2,1)	(1,3) (2,2) (3,1)	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	(4,6) (5,5) (6,4)	(5,6) (6,5)	(6,6)
$P(2)=\frac{1}{36}$	$P(3)=\frac{1}{18}$	$P(4)=\frac{1}{12}$	$P(5)=\frac{1}{9}$	$P(6)=\frac{5}{36}$	$P(7)=\frac{1}{6}$	$P(8)=\frac{5}{36}$	$P(9)=\frac{1}{9}$	$P(10)=\frac{1}{12}$	$P(11)=\frac{1}{18}$	$P(12)=\frac{1}{36}$

Aufgabe 2:

ZE: „Ziehung der Lottozahlen“

Es gibt $\binom{49}{6}$ unterscheidbare Möglichkeiten für das Ziehen von sechs aus 49 Zahlen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Ziehung!

Es liegt ein L-Experiment vor, da alle Kombinationen gleichwahrscheinlich sind (für den Lottosechser)!

$$P("Sechser") = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 0{,}000000071 = 0{,}0000071\%$$

$$P("Dreier") = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0{,}017650 = 1{,}8\%$$

$$P("Fünfer") = \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{43}{2330636} = 0{,}000018 = 0{,}0018\%$$