Grundwissen aus Jgst. 10 zur Oberstufe

Inhaltsverzeichnis

Grundlegende Begriffe / Definitionen

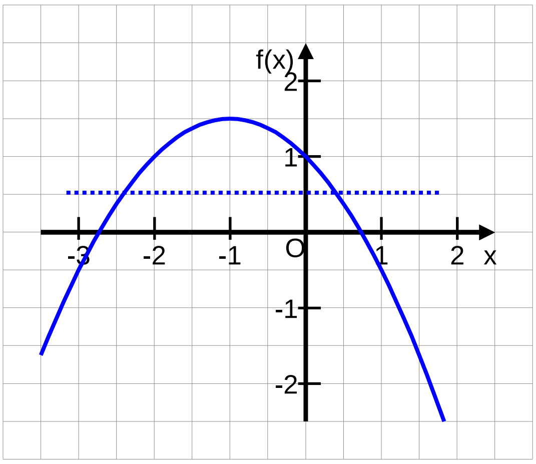
Definition:

Eine Zuordnung f, die jedem Element x einer Menge D_f, der sog. Definitionsmenge[1] (auch Definitionsbereich) von f, genau ein Element y der sog. Wertemenge[2] W_f zuweist, heißt Funktion. f ist umkehrbar, wenn zusätzlich gilt: Zu jedem $y \in W_f$ existiert genau ein $x \in D_f$.

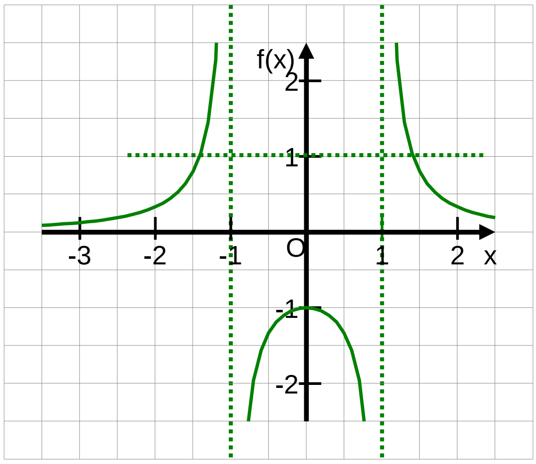
Schreibweise:

$$f: D_f \to W_f$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

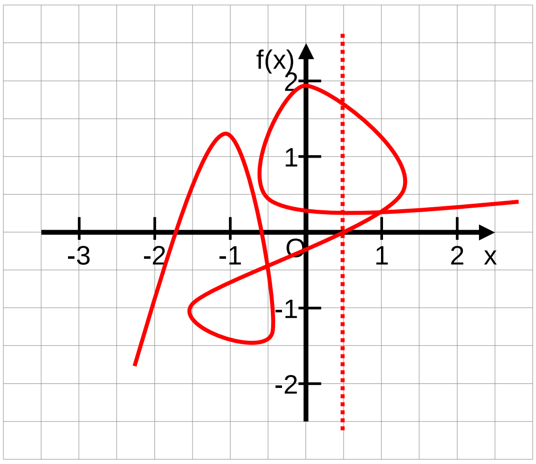
Grafische Verdeutlichung:



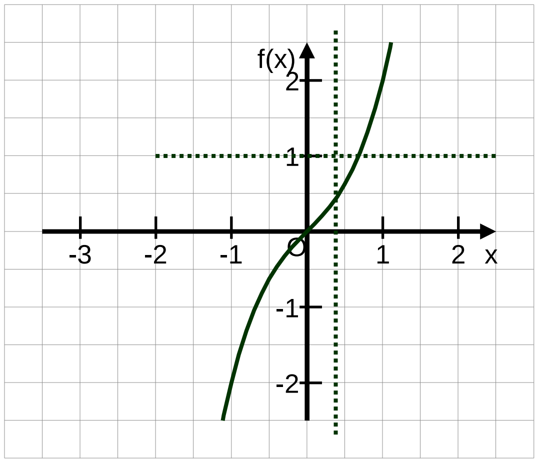
Funktion: $f(x) = -0{,}5 \cdot x^2 - x + 1$
nicht umkehrbar



Funktion: $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ n. ukb.



Keine Funktion, da zu einigen x – Werten mehrere y – Werte gehören!



Umkehrbare Funktion: $f(x) = x^3 + x$.
Zu jedem y gibt es auch genau ein x

[1] Die Definitionsmenge besteht aus den Zahlwerten, die anstelle von x in den Funktionsterm eingesetzt werden dürfen. Aus einer Zahlmenge sind zur Bestimmung von D_f grundsätzlich diejenigen Werte auszuschließen, für die eine Berechnung des Termwerts unmöglich ist. Selbstverständlich kann D_f dann noch weiter eingeschränkt werden!

[2] Die Wertemenge W_f entspricht der Menge aller Lösungen, die sich durch das Einsetzen aller x – Werte aus D_f ergeben!

Geometrische Aspekte (siehe Skizzen):

Ein Graph repräsentiert eine Funktion, wenn jede (beliebige) Parallele zur y – Achse den Graphen in nur einem Punkt schneidet!
Ein Graph repräsentiert eine umkehrbare Funktion, wenn darüber hinaus jede (beliebige) Parallele zur x – Achse den Graphen ebenfalls in nur einem Punkt schneidet!

Ergänzungen zu umkehrbaren Funktionen:

Gegeben sei die umkehrbare Funktion[3] $f(x)$.

a) Die zu $f(x)$ gehörende Umkehrfunktion wird mit $f^{-1}(x)$ bezeichnet.

b) f^{-1} ist Umkehrfunktion zu f und umgekehrt.

c) Es gilt: $f^{-1}(f(x)) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ (Funktion und Umkehrfunktion heben sich in ihrer Wirkung auf).

Beispiele:

i) $$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ f^{-1}(x) = x^2 \end{array}\right\} \to f\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{x^2} = x \qquad f^{-1}(f(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad (x \geq 0)$$

ii) $$\left.\begin{array}{l} f(x) = a^x \\ f^{-1}(x) = \mathbf{log}_a\, x \end{array}\right\} \to f\left(f^{-1}(x)\right) = a^{\mathbf{log}_a x} = x \qquad f^{-1}(f(x)) = \mathbf{log}_a\, a^x = x$$
$$(a > 0;\, a \neq 1;\, x \in IR)$$

d) Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} ergibt sich durch die Achsenspiegelung des Graphen G_f an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten (Geradengleichung der Spiegelachse: y = x).

e) Grundsätzlich gilt: $D_f = W_{f^{-1}} \quad sowie \quad D_{f^{-1}} = W_f$.

f) Den Term der Umkehrfunktion zu $f(x) = y$ erhält man durch Vertauschung von x und y in der ursprünglichen Funktionsgleichung und dem (manchmal trickreichen) Auflösen der entstandenen Gleichung nach y.

Beispiele:

i) $$f(x) = y = 3 \cdot x - 4$$
$$x = 3 \cdot y - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 3 \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{4}{3} = f^{-1}(x)$$

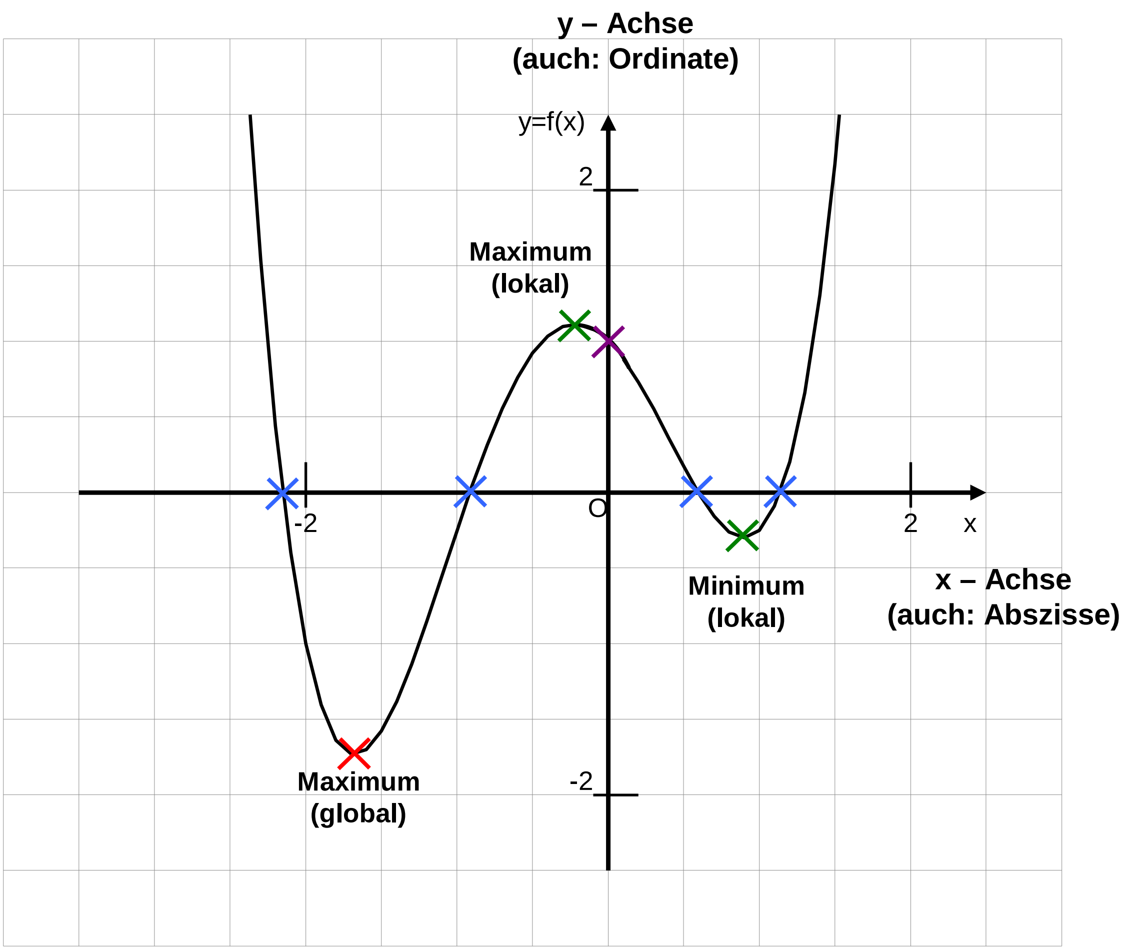
ii) $$f(x) = y = x^2 - 6 \cdot x + 2 \xrightarrow{quadr.\ Erg.} y = (x-3)^2 - 7 \qquad (x \geq 3)$$
$$x = (y-3)^2 - 7 \Leftrightarrow x + 7 = (y-3)^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{x+7} + 3 = f^{-1}(x)$$

iii) $$f(x) = y = e^{1-x^2} \qquad D_f = IR \qquad W_f = \left]0; e\right]$$
$$x = e^{1-y^2} \Leftrightarrow 1 - y^2 = \mathbf{ln}\, x \Leftrightarrow y^2 = 1 - \mathbf{ln}\, x \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - \mathbf{ln}\, x} = f^{-1}(x)$$
$$D_{f^{-1}} = \left]0; e\right] \quad W_{f^{-1}} = IR$$

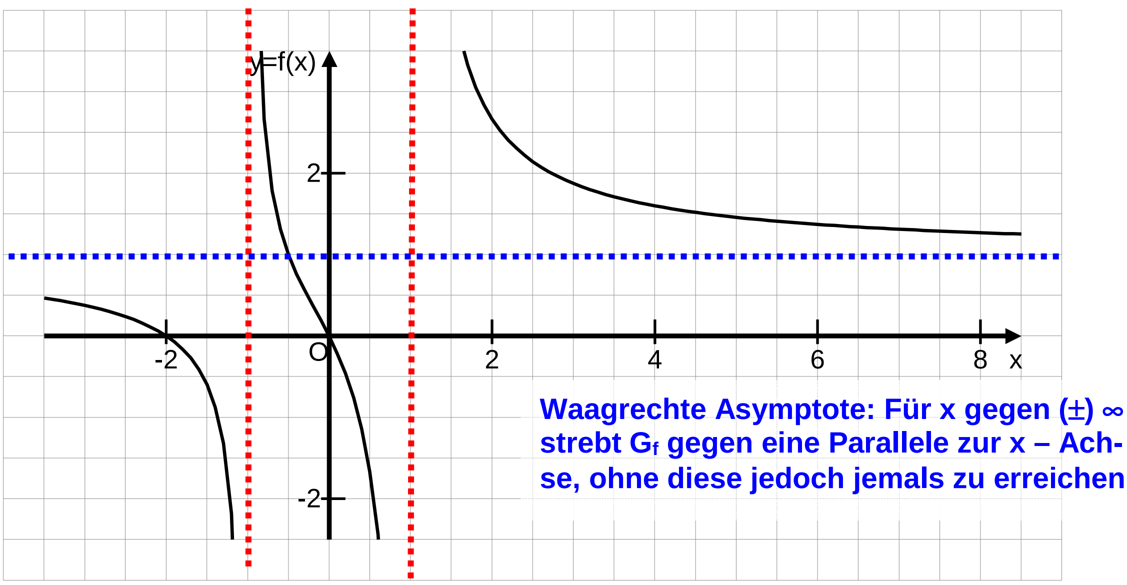
---

[3] Jede Funktion lässt sich durch geeignete Einschränkungen ihrer Definitionsmenge – zumindest auf bestimmten Intervallen – umkehren!

Grafische Verdeutlichung weiterer wichtiger Bezeichnungen



Nullstellen (Schnittpunkte mit der x – Achse)
Ordinatenschnittpunkt (Achsenabschnitt / Schnittpunkt mit der y – Achse)
lokale Extremstellen (Extrema / Maximum / Minimum)
globale Extremstellen (Maximum / Minimum)



Polstellen (Unendlichkeitsstellen): An Polstellen liegen vertikale Asymptoten vor!

Verschiebungssätze / Streckung und Stauchung

Gegeben sei eine Funktionsgleichung $f(x)=y$. Im Folgenden werden elementare Veränderungen des Funktionsterms untersucht!

$$f(x)\xrightarrow{a\neq 0} f(x+a):\begin{cases} a>0\text{: G um } |a| \text{ in Richtung der negativen x - Achse verschoben} \\ a<0\text{: G um } |a| \text{ in Richtung der positiven x - Achse verschoben} \end{cases}$$

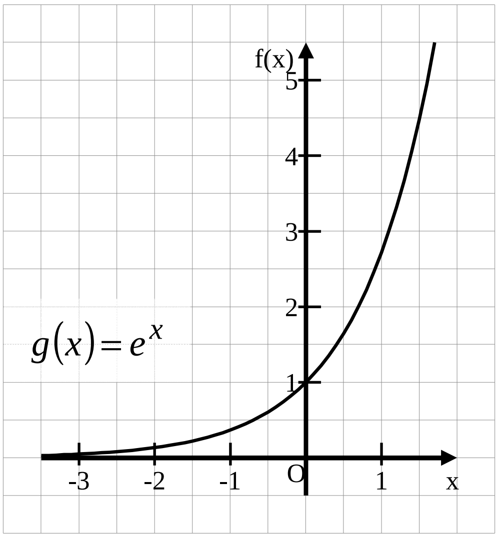
$$f(x)\xrightarrow{b\neq 0} f(b\cdot x):\begin{cases} b>1\text{: G um Faktor b in Richtung der x - Achse gestaucht} \\ 1>b>0\text{: G um Faktor b in Richtung der x - Achse gestreckt} \\ -1<b<0\text{: G um Faktor b ... gestreckt; gespiegelt an y - Achse} \\ b<-1\text{: G um Faktor b ... gestaucht; gespiegelt an y - Achse} \end{cases}$$

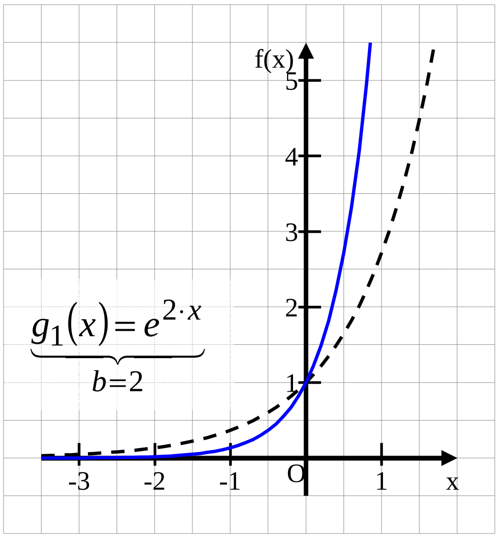
$$f(x)\xrightarrow{c\neq 0} c\cdot f(x):\begin{cases} c>1\text{: G um Faktor c in Richtung der y - Achse gestreckt} \\ 1>c>0\text{: G um Faktor c in Richtung der y - Achse gestaucht} \\ -1<c<0\text{: G um Faktor c ... gestaucht; gespiegelt an x - Achse} \\ c<-1\text{: G um Faktor c ... gestreckt; gespiegelt an x - Achse} \end{cases}$$

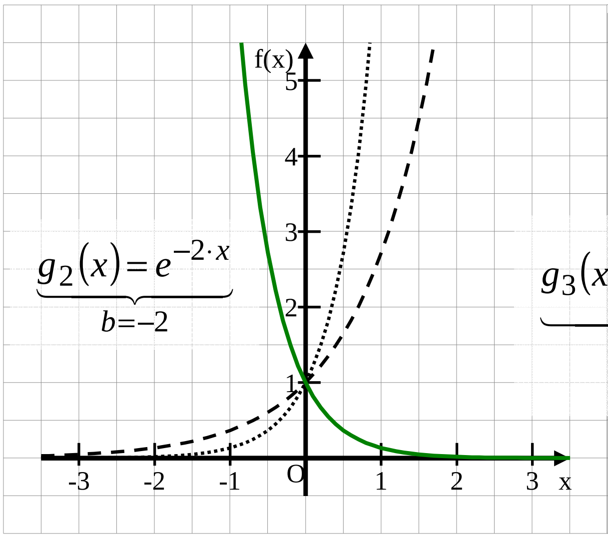
$$f(x)\xrightarrow{d\neq 0} f(x)+d:\begin{cases} d>0\text{: G um } |d| \text{ in Richtung der positiven y - Achse verschoben} \\ a<0\text{: G um } |d| \text{ in Richtung der negativen y - Achse verschoben} \end{cases}$$

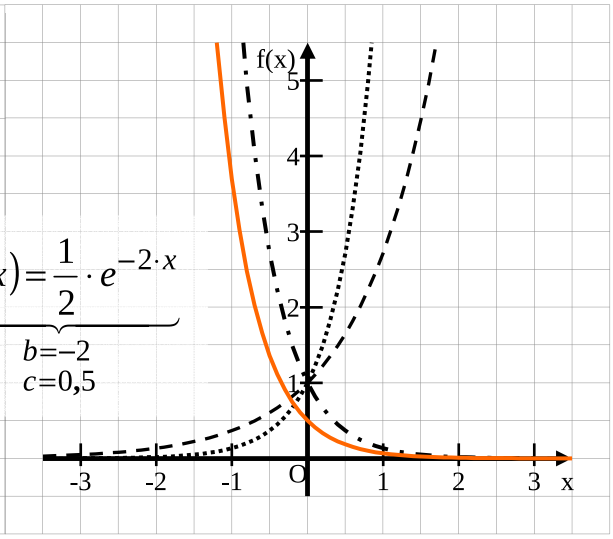
All diese Veränderungen können auch gleichzeitig vorliegen!

Beispiel: $g(x) \xrightarrow{\text{wird überführt zu}} g_v(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x} - 2$

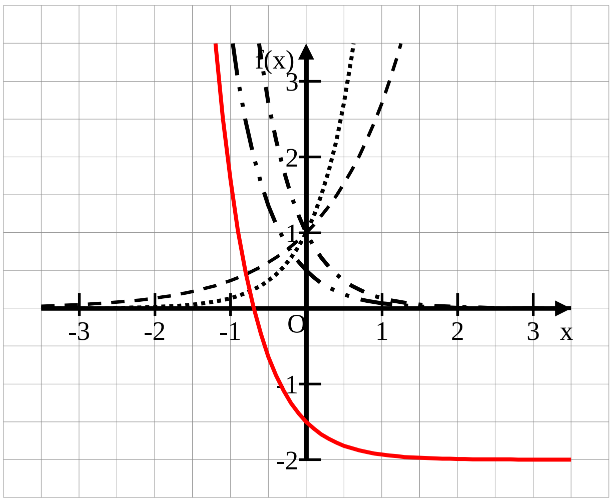








$$\underbrace{g_v(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x} - 2}_{\substack{b=-2 \\ c=0{,}5 \\ d=-2}}$$



Elementare Funktionsklassen

(inklusive benötigtes Grundwissen)

Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Definition:

Eine Funktion f: $ID_f \to W_f$ der Form

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot \underbrace{x}_{=x^1} + a_0 \underbrace{\left[\cdot x^0\right]}_{=1}$$

mit: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in IR; \quad a_n \neq 0, n \in IN$

heißt ganzrationale Funktion oder auch Polynom vom Grade n. a_n heißt Leitkoeffizient von f. Ist $a_n = 1$ so heißt f normiert.

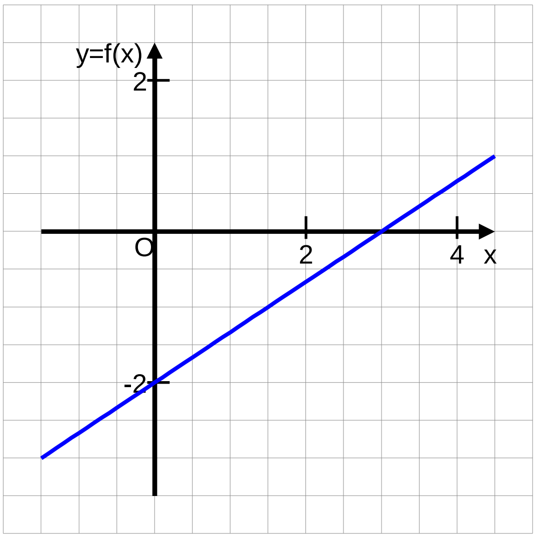
Beispiele / Unterklassen:

1. **Lineare Funktionen (Graphen ergeben Geraden):**

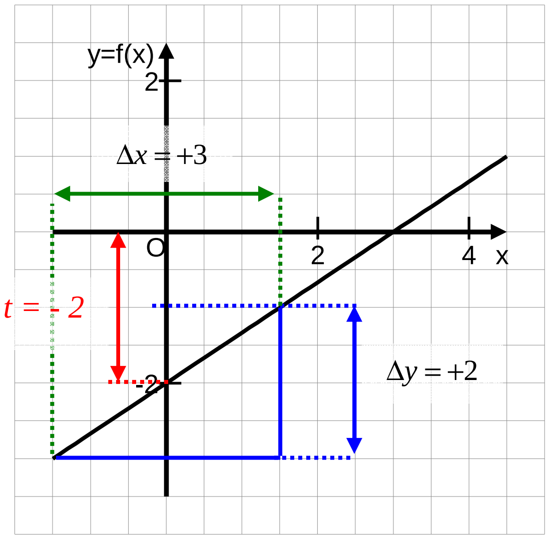
Funktionsgleichung (allgemeine Geradengleichung)	• $g: y = m \cdot x + t$ • $g: f(x) = m \cdot x + t$
Bezeichnungen	• m heißt Steigung • t heißt y – Achsenabschitt oder auch Ordinatenabschnitt
Eigenschaften	• Nullstelle: $x_N = \frac{-t}{m}$ • Abszissenschnittpkt.: $N\left(\frac{-t}{m} / 0\right)$ • Ordinatenschnittpunkt: $S_y(0/t)$
Berechnung der Steigung m der Geraden g mit Hilfe beliebig gegebener Punkte $P(x_1/y_1)$ und $Q(x_2/y_2)$ auf g.	• $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Aufstellen einer Geradengleichung g mit Hilfe beliebig gegebener Punkte $P(x_1/y_1)$ und $Q(x_2/y_2)$ auf g (Zweipunktform der Geradengleichung).	• $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (implizit)$ • $y = \underbrace{\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)}_{=m} \cdot x + \underbrace{\left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1\right)}_{=t}$ (*explizit*)
Aufstellen einer Geradengleichung g mit Hilfe beliebig gegebener Punkte $P(x_1/y_1)$ und $Q(x_2/y_2)$ auf g (lineares Gleichungssystem).	• $(I) \quad y_1 = m \cdot x_1 + t$ $(II) \quad y_2 = m \cdot x_2 + t$ … nach Berechnung von m und t werden diese Werte in die allgemeine Geradengleichung eingesetzt!
Aufstellen einer Geradengleichung g durch Ablesen der relevanten Werte aus einer Zeichnung!	• ---

Beispiel 1:

Entnehmen Sie der Zeichnung die zum Graphen gehörende Funktionsgleichung!



Lsng:



g ergibt sich durch:

$$y = m \cdot x + t = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot x + t$$

$$\rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot x - 2$$

Beispiel 2:

Eine Gerade g werde festgelegt durch die Punkte P(2/3) und Q(-5/4). Bestimmen Sie die Geradengleichung!

Lsng. 1: $\frac{y-3}{x-2} = \frac{4-3}{(-5)-2} = -\frac{1}{7} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7} \cdot (x-2) + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7} \cdot x + \frac{23}{7}$

Abszissenschnittpunkt: $N(23/0)$; Ordinatenschnittpunkt: $S_y\left(0/\frac{23}{7}\right)$;

Lsng. 2: $\begin{matrix} (I) & 3 = m \cdot 2 + t \\ (II) & 4 = m \cdot (-5) + t \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (I) & t = 3 - 2 \cdot m \\ (II) & t = 5 \cdot m + 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 2 \cdot m = 5 \cdot m + 4 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{7} \\ \Rightarrow t = \frac{23}{7} \Rightarrow y = -\frac{1}{7} \cdot x + \frac{23}{7} \end{cases}$

Abszissenschnittpunkt: $N(23/0)$; Ordinatenschnittpunkt: $S_y\left(0/\frac{23}{7}\right)$;

2. Quadratische Funktionen (Graphen ergeben Parabeln):

<table>
<tr><td>Funktionsgleichung</td><td>

- $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
(allgemeine Parabelgleichung)
- $y = a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4 \cdot a}$
(Scheitelform)

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Bemerkung:

Die Scheitelform entsteht aus der allgemeinen Parabelgleichung durch quadratische Ergänzung!

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x \right) + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \overbrace{\left(\frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2 \cdot a} \right)^2}^{=0} \right) + c =$$

$$= a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 - \frac{b^2}{4 \cdot a^2} \right) + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4 \cdot a}$$

</td></tr>
<tr><td>Eigenschaften</td><td>

- Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$
für: $b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$
- Abszissenschnittpkt.: $N(x_{1/2} / 0)$
- Ordinatenschnittpunkt: $S_y(0 / c)$
- Der Funktionsgraph ist achsensymmetrisch zu einer Parallelen zur y – Achse, die durch den Scheitelpunkt der Parabel verläuft!

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Bemerkung:

Die Lösungsformel (Mitternachtsformel) ergibt sich für y = 0 durch Auflösen der Scheitelform nach x!

$$y = a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4 \cdot a} = 0 \Leftrightarrow a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 = \frac{b^2}{4 \cdot a} - c \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} + \frac{b}{2 \cdot a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

</td></tr>
<tr><td>Scheitelpunkt
(globales Maximum / Minimum)</td><td>

- $M\left(\frac{-b}{2 \cdot a} / c - \frac{b^2}{4 \cdot a} \right)$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eine quadratische Funktion ist eindeutig durch die Angabe dreier Punkte, die auf ihrem Graphen liegen bestimmt (Lösung durch lineares Gleichungssystem!</td></tr>
</table>

Beispiel:

Auf dem Graphen der Parabel P liegen die Punkte $A(2/1), B\left(-3/-\frac{19}{2}\right)$ und $C(4/1)$.

Stellen Sie den Funktionsterm f auf, bestimmen Sie die Scheitelform und berechnen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt von G_f. Skizzieren Sie den Verlauf von G_f.

Lsng.:

$$y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \xrightarrow{A,B,C\ \text{einsetzen} \rightarrow\ LGS} \begin{array}{ll} (I) & 4\cdot a + 2\cdot b + c = 1 \\ (II) & 9\cdot a - 3\cdot b + c = -\frac{19}{2} \\ (III) & 16\cdot a + 4\cdot b + c = 1 \end{array}$$

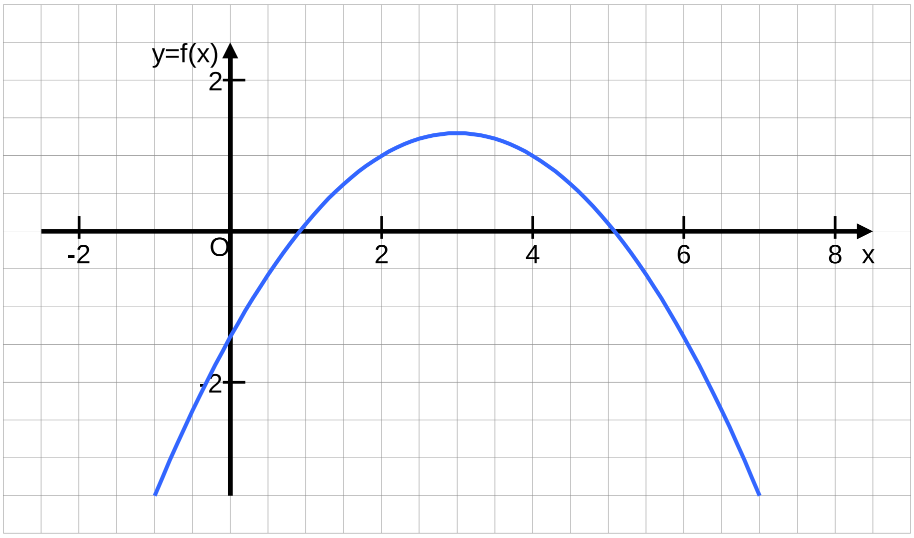
$$\xrightarrow{(III)-(I)} 12\cdot a + 2\cdot b = 0 \Rightarrow b = -6\cdot a \ \ in\ LGS: \begin{array}{ll} (I)^* & -8\cdot a + c = 1 \\ (II)^* & 27\cdot a + c = -\frac{19}{2} \end{array}$$

$$\xrightarrow{(I)^*\ nach\ c} c = 1 + 8\cdot a \ \ in\ (II)^*:\ 35\cdot a = -\frac{21}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{3}{10} \Rightarrow b = \frac{9}{5} \wedge c = -\frac{7}{5}$$

$$\rightarrow y = -\frac{3}{10}\cdot x^2 + \frac{9}{5}\cdot x - \frac{7}{5}$$

$$\rightarrow y = -\frac{3}{10}\cdot (x-3)^2 + \frac{13}{10} \qquad \rightarrow S\left(3/\frac{13}{10}\right)$$

$$\rightarrow x_{1/2} = \frac{-\frac{9}{5} \pm \sqrt{\frac{81}{25} - \frac{42}{25}}}{-\frac{3}{5}} = \frac{-9 \pm \sqrt{39}}{-3} = 3 \pm \sqrt{\frac{13}{3}}$$



Einschub: Die Polynomdivision

Vorbereitung / Grundlagen[4]:

Gegeben seien verschiedene Punkte[5] $N_1(-a_1/0), N_2(-a_2/0), N_3(-a_3/0),..., N_n(-a_n/0)$ ($a \in IR; n \in IN$) auf der x – Achse. Jedem dieser Punkte kann eine Bestimmungsgleichung der Form $x = -a$ zugeordnet werden. Diese Gleichung nennt man auch Nullstelle in expliziter Form! Durch Umformung von $x = -a$ zu $(x+a) = 0$ erhält man die sog. Nullstellengleichung in impliziter Form!

Man betrachtet folgende Produktbildungen der Nullstellengleichungen in impliziter Form:

$$\begin{array}{rr}
1.\ zu\ N_1: & (x+a_1)=0 \\
2.\ zu\ N_1 \cdot N_2: & (x+a_1)\cdot(x+a_2)=0 \\
3.\ zu\ N_1 \cdot N_2 \cdot N_3: & (x+a_1)\cdot(x+a_2)\cdot(x+a_3)=0 \\
4.\ zu\ N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4: & (x+a_1)\cdot(x+a_2)\cdot(x+a_3)\cdot(x+a_4)=0 \\
...
\end{array}$$

Ausmultipliziert ergeben sich die folgenden Nullstellengleichungen:

$$\begin{array}{l}
1.\ (x+a_1)=0 \\
2.\ (x+a_1)\cdot(x+a_2)=0 \\
3.\ (x+a_1)\cdot(x+a_2)\cdot(x+a_3)=0 \\
4.\ (x+a_1)\cdot(x+a_2)\cdot(x+a_3)\cdot(x+a_4)=0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
1.\ (x+a_1)=0 \\
2.\ x^2+(a_1+a_2)\cdot x+a_1\cdot a_2=0 \\
3.\ x^3+(a_1+a_2+a_3)\cdot x^2+(a_1\cdot a_2+a_1\cdot a_3+a_2\cdot a_3)\cdot x+a_1\cdot a_2\cdot a_3=0 \\
4.\ ...
\end{array}$$

Die sich ergebenden Nullstellengleichungen lassen sich eindeutig Funktionsgleichungen von ganzrationalen Funktionen ebenso zuordnen, wie sich ganzrationalen Funktionen die zu ihnen gehörenden Nullstellengleichungen zuordnen lassen.

$$\begin{array}{l}
1.\ f(x)=x+a_1 \\
2.\ f(x)=x^2+(a_1+a_2)\cdot x+a_1\cdot a_2 \\
3.\ f(x)=x^3+(a_1+a_2+a_3)\cdot x^2+(a_1\cdot a_2+a_1\cdot a_3+a_2\cdot a_3)\cdot x+a_1\cdot a_2\cdot a_3 \\
...
\end{array}$$

Zerlegungssatz 1:

Besitzt eine normierte ganzrationale Funktion vom Grade n auch n Nullstellen, so ergibt sich der Beiwert der x^{n-1} Potenz als Summe der expliziten Nullstellen (beachte Vorzeichenwahl) und die Konstante als Produkt der expliziten Nullstellen (Für quadratische Funktionen heißt dieser Zusammenhang Zerlegungssatz von Vieta)!

---

[4] Es genügt für das Erkennen des Prinzips die Beschränkung auf normierte Polynome!

[5] Die a_i der gegebenen Punkte sind nicht mit den a_i der Definition einer gebrochenrationalen Funktion zu verwechseln!

Bemerkungen / Folgerungen:

- Nicht jede ganzrationale Funktion besitzt reelle Nullstellen (z.B.: $f(x)=x^2+1$).
- Besitzt eine ganzrationale Funktion vom Grade n eine Nullstelle, so lässt sich der Funktionsterm faktorisieren. Ein Faktor des entstehenden Produkts besteht aus der Nullstelle in impliziter Form, den anderen Faktor bildet ein „Restpolynom“ vom Grade (n – 1). Dieses „Restpolynom“ kann u.U. weiter faktorisiert werden!

  Beispiel 1:

  $f(x)=x^3-x^2+x-1 \qquad x_1=1 \rightarrow (x-1)=0$

  ist eine Nullstellengleichung von G_f in impliziter Form

  Zerlegung: $f(x)=x^3-x^2+x-1 \xrightarrow{Zerlegung} f(x)=(x-1)\cdot\left(x^2+1\right)$

  Das Restpolynom lässt sich nicht weiter über IR faktorisieren!

  Beispiel 2:

  $f(x)=x^3-1 \qquad x_1=1 \rightarrow (x-1)=0$

  ist eine Nullstellengleichung von G_f in impliziter Form

  Zerlegung: $f(x)=x^3-1 \xrightarrow{Zerlegung} f(x)=(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$

  Das Restpolynom lässt sich nicht weiter über IR faktorisieren!

  Beispiel 3:

  $f(x)=x^3-x^2-x+1 \qquad x_1=1 \rightarrow (x-1)=0$

  ist eine Nullstellengleichung von G_f in impliziter Form

  Zerlegung: $f(x)=x^3-x^2-x+1 \xrightarrow{Zerlegung} f(x)=(x-1)\cdot\left(x^2-1\right)$

  Das Restpolynom lässt sich weiter über IR faktorisieren (III. bin. Formel):

  $x^2-1=(x-1)\cdot(x+1) \Rightarrow f(x)=(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)=(x-1)^2\cdot(x+1)$

- Der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion vom Grade n besitzt maximal n (nach Beispiel 3 nicht notwendigerweise verschiedene) Nullstellen in IR!
- Über IR nicht mehr weiter faktorisierbare „Restpolynome“ heißen irreduzibel[6]!

Zur Durchführung der Polynomdivision:

Für ganzrationale Funktionen höheren Grades (n > 2) muss zur Berechnung der Nullstellen zunächst eine Lösung der entsprechenden Nullstellengleichung durch geschicktes Probieren oder mit Hilfe des Zerlegungssatzes 1 ermittelt werden! Die eigentliche Division folgt dem Schema der Division von ganzen Zahlen!

Beachten Sie: Die Polynomdivision durch eine implizite Nullstelle geht immer auf (Polynomdivision ohne Rest)!

---

[6] Über der Zahlmenge der sog. komplexen Zahlen lassen sich irreduzible Polynome komplett in Linearfaktoren (Nullstellen in impliziter Form) zerlegen! Hier gilt der Fundamentalsatz der Algebra (alternative Version):

Jede ganzrationale Funktion vom Grade n besitzt in den komplexen Zahlen genau n (nicht notwendigerweise verschiedene) Nullstellen!

Beispiele zur Polynomdivision

Beispiel 1: $f(x)=\left(x^4-3\cdot x^3+4\cdot x^2-x-6\right)=0 \xrightarrow{\textit{Ausprobieren}} f(2)=0 \rightarrow x=2 \xrightarrow{\textit{Teiler}} (x-2)=0$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4-3\cdot x^3+4\cdot x^2-x-6\right):(x-2)=x^3-x^2+2\cdot x+3 \\
-\left(x^4-2\cdot x^3\right) \\
\qquad -x^3+4\cdot x^2 \\
\qquad -\left(-x^3+2\cdot x^2\right) \\
\qquad\qquad +2\cdot x^2-x \\
\qquad\qquad -\left(+2\cdot x^2-4\cdot x\right) \\
\qquad\qquad\qquad 3\cdot x-6 \\
\qquad\qquad\qquad -(3\cdot x-6)
\end{array}
$$

Das Restpolynom besitzt zwar weitere Nullstellen, diese sind jedoch (für uns) nicht mehr ohne Rechnerhilfe zu ermitteln!

Beispiel[7] 2: $f(x)=\left(2\cdot x^3+x^2+1\right)=0 \xrightarrow{\textit{Ausprobieren}} f(-1)=0 \rightarrow x=-1 \xrightarrow{\textit{Teiler}} (x+1)=0$

$$
\begin{array}{l}
\left(2\cdot x^3+\ \ x^2+0\cdot x+1\right):(x+1)=2\cdot x^2-x+1 \\
-\left(2\cdot x^3+2\cdot x^2\right) \\
\qquad -x^2+0\cdot x \\
\qquad -\left(-x^2\ \ -x\right) \\
\qquad\qquad x+1 \\
\qquad\qquad -(x+1)
\end{array}
$$

$$2\cdot x^2-x+1=0$$

$$\rightarrow x_{2/3}=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{4}$$

Das Restpolynom besitzt keine weiteren Nullstellen in IR.

Zerlegung: $f(x)=\left(2\cdot x^3+x^2+1\right)=(x+1)\cdot\left(2\cdot x^2-x+1\right)$

Beispiel 3: $f(x)=\left(x^4-13\cdot x^2+36\right)=0 \xrightarrow{\textit{Ausprobieren}} f(2)=0 \rightarrow x=2 \xrightarrow{\textit{Teiler}} (x-2)=0$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4+0\cdot x^3-13\cdot x^2+0\cdot x+36\right):(x-2)=x^3+2\cdot x^2-9\cdot x-18 \\
-\left(x^4-2\cdot x^3\right) \\
\qquad 2\cdot x^3-13\cdot x^2 \\
\qquad -\left(2\cdot x^3-4\cdot x^2\right) \\
\qquad\qquad -9\cdot x^2+0\cdot x \\
\qquad\qquad -\left(-9\cdot x^2+18\cdot x\right) \\
\qquad\qquad\qquad -18\cdot x+36 \\
\qquad\qquad\qquad -(-18\cdot x+36)
\end{array}
$$

[7] Ergänze „fehlende“ Potenzen x^k durch $0\cdot x^k$ ($k \in$ IN; $k < n$)

$$x^3 + 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 18 = 0 \xrightarrow{Ausprobieren} x = -3 \xrightarrow{Teiler} (x+3) = 0$$

$$\begin{array}{l} \left(x^3 + 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 18\right) : (x+3) = x^2 - x - 6 \\ -\left(x^3 + 3 \cdot x^2\right) \\ \quad - x^2 - 9 \cdot x \\ \quad -\left(- x^2 - 3 \cdot x\right) \\ \qquad - 6 \cdot x - 18 \\ \qquad -\left(- 6 \cdot x - 18\right) \end{array}$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$\Rightarrow x_{3/4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$\rightarrow x_3 = 3; \quad x_4 = -2;$$

Das Polynom lässt sich vollständig in Linearfaktoren zerlegen!

Zerlegung: $f(x) = x^4 - 13 \cdot x^2 + 36 = (x-3) \cdot (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$

Alternative[8]: Lösung durch eine sog. Substitution

$$f(x) = x^4 - 13 \cdot x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{Substituiere \quad z = x^2} f(z) = z^2 - 13 \cdot z + 36 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 4 \xrightarrow{x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1}} x_1 = -2; \quad x_2 = 2; \\ z_2 = 9 \xrightarrow{x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2}} x_3 = -3; \quad x_4 = 3; \end{cases}$$

[8] Das Lösungsverfahren der Substitution empfiehlt sich bei Gleichungen der Form:

$$a \cdot x^{2 \cdot k} + b \cdot x^k + c = 0$$

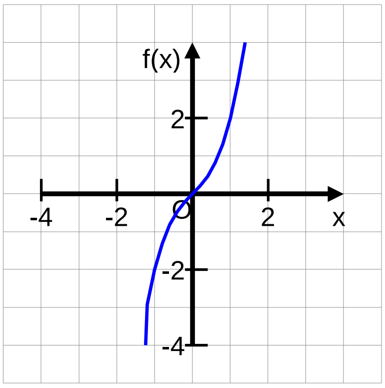
$$\text{Substitution}: \quad x^k = z \rightarrow a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\text{Resubstitution}: \quad z_{1/2} = x_{\ldots}^{\ k} \rightarrow x = (\pm)\sqrt[k]{z_{1/2}} = (\pm)\sqrt[k]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$$

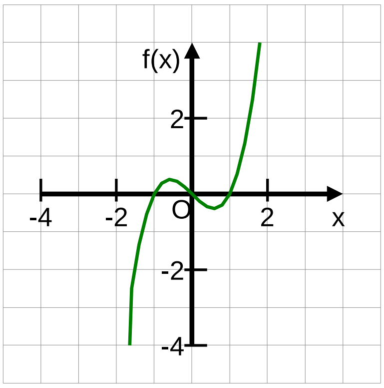
3. Kubische Funktionen:

Funktionsgleichung	• $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
Historisches: Das Lösen kubischer Gleichungen geht auf die italienischen Mathematiker Tartaglia und Cardano (16 und 17 Jhd.) zurück. Cardano entwickelte aufgrund der Überlegungen von Tartaglia Lösungsformeln, die für den Hausgebrauch allerdings viel zu schwer zu händeln sind!	
Eigenschaften	• Nullstellen: siehe Polynomdivision • Abszissenschnittpkte.: Polynomdivision • Ordinatenschnittpunkt: $S_y(0/d)$
Eine kubische Funktion ist eindeutig durch die Angabe von vier Punkten, die auf ihrem Graphen liegen bestimmt (Lösung durch lineares Gleichungssystem)!	

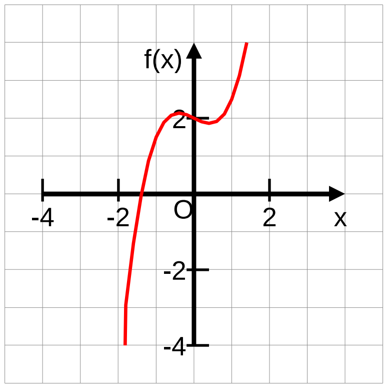
Beispiele für Graphen von kubischen Funktionen:



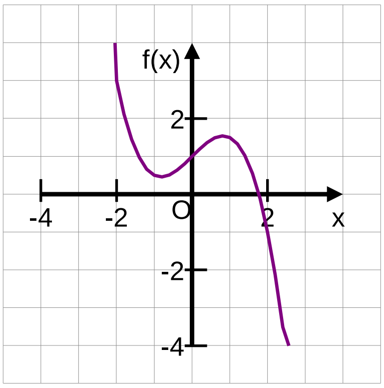
$f(x) = x^3 + x$



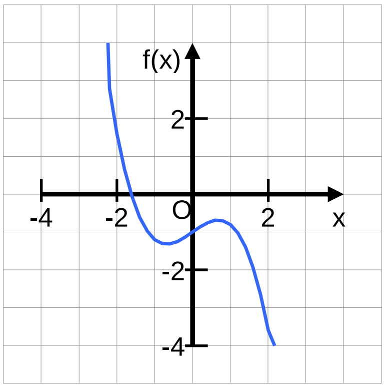
$f(x) = x^3 - x$



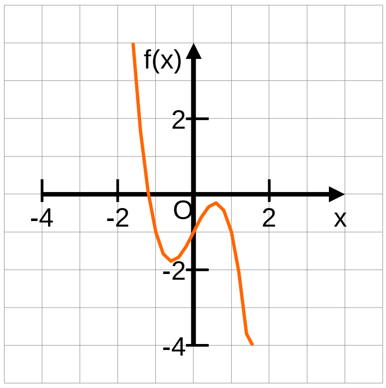
$f(x) = x^3 - 0{,}5 \cdot x + 2$



$f(x) = -0{,}5 \cdot x^3 + x + 1$



$f(x) = -0{,}5 \cdot x^3 - 0{,}7 \cdot x - 1$

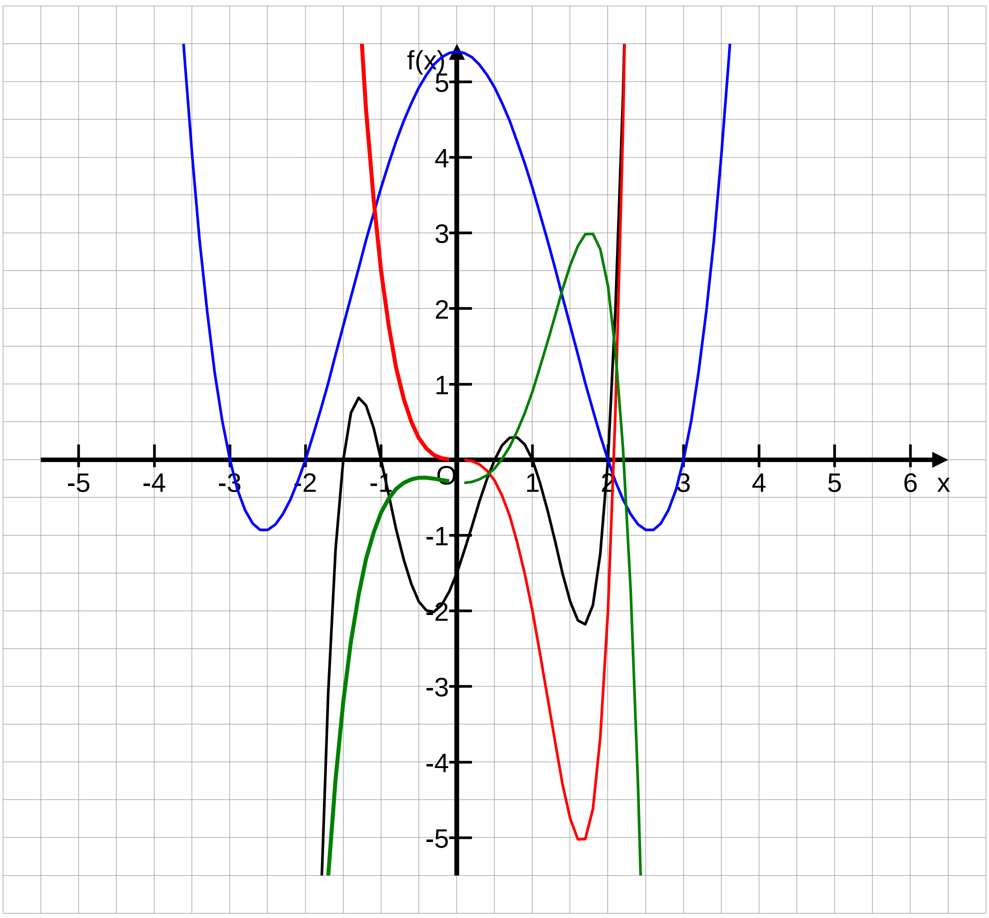


$f(x) = -2 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$

4. Polynome höheren Grades:

Funktionsgleichung	• $y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$
Historisches: Cardano (17 Jhd.) entwickelte auch Lösungsformeln für die allgemeine ganzrationale Funktion 4. Grades. Die Jagd nach Lösungsformeln für Polynome höheren Grades als vier lieferte in der Folgezeit allerdings keine brauchbaren Ergebnisse. Im 18. Jhd. gelang es dem jungen Franzosen Evariste Galoire nachzuweisen, dass es für n > 4 keine allgemeingültigen Lösungsformeln mehr geben kann!	
Eigenschaften	• Nullstellen: siehe Polynomdivision • Abszissenschnittpkte.: Polynomdivision • Ordinatenschnittpunkt: $S_y(0/a_0)$
Ein Polynom ist eindeutig durch die Angabe von (n + 1) Punkten, die auf seinem Graphen liegen bestimmt (Lösung durch lineares Gleichungssystem)!	

Beispiele für Graphen von Polynomen höheren Grades:



Polynom 4. Grades Polynom 5. Grades Polynom 6. Grades Polynom 6. Grades

Einfache gebrochen rationale Funktionen

Definition:

Eine Funktion f: $ID_f \to \backslash W_f$ der Form

$$f(x)=\frac{z(x)}{n(x)} \text{ mit den ganzrationalen Funktionen } z(x) \text{ und } n(x)$$

heißt gebrochen rationale Funktion.

Elementare Rechen – Bearbeitungsverfahren:

Definitionsmenge ID_{max}	• $ID_{\mathbf{max}} = IR \setminus \{x \in IR \mid n(x)=0\}$ heißt: Alle reellen Zahlen ohne die Nullstellenmenge (die Nullstellen) des Nennerpolynoms. Die Nullstellen des Nennerpolynoms heißen auch Definitionslücken von f. An ihnen liegen i.d.R. vertikale Asymptoten vor!
Nullstellen und Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems	• **Nullstellen:** Setze $z(x)=0$, denn: Ein Quotient besitzt den Wert Null, wenn der Zähler den Wert Null besitzt! • Abszissenschnittpkte.: … • Ordinatenschnittpunkt: $S_y(0/f(0))$
Zeichnung	• Evtl. mit Hilfe einer Wertetabelle

Beispiel 1:

$$f(x)=\frac{x^2-7\cdot x+12}{x^2+3\cdot x+4}=\frac{(x-3)\cdot(x-4)}{(x+1)\cdot(x+3)}$$

$$f(0)=\frac{12}{4}=3 \Rightarrow S_y(0/3)$$

$$n(x)=(x+1)\cdot(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ID = IR \setminus \{-3;-1\}$$

$$z(x)=(x-3)\cdot(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_3=3 \\ x_4=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_1(3/0);\ N_2(4/0);$$

Beispiel 2:

$$f(x)=\frac{x^2-2\cdot x}{x^2-1}=\frac{(x-2)\cdot x}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

$$f(0)=\frac{0}{-1}=0 \Rightarrow S_y(0/0)$$

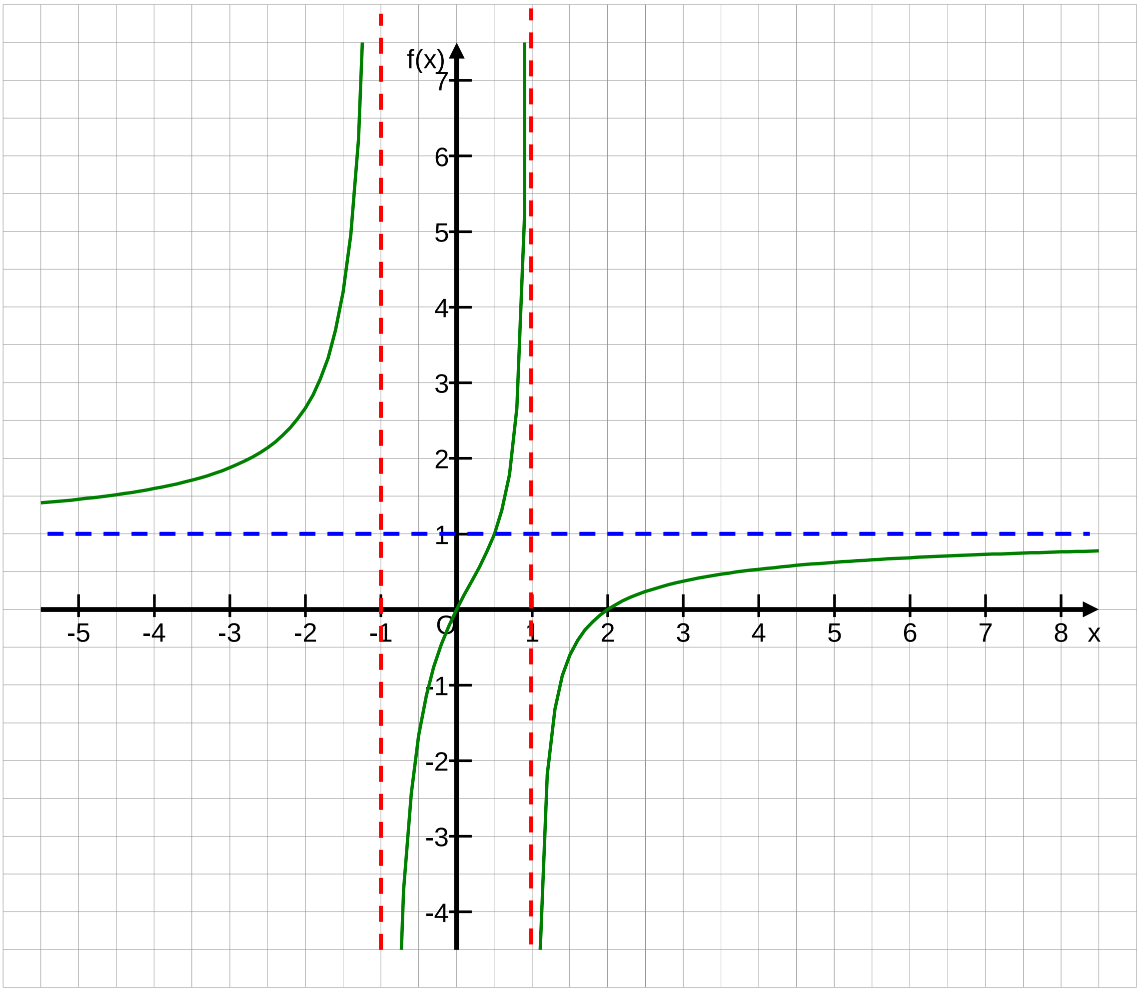
$$n(x)=(x+1)\cdot(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ID = IR \setminus \{\pm 1\}$$

$$z(x)=(x-2)\cdot x=0 \Rightarrow \begin{cases} x_3=2 \\ x_4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_1(2/0);\ N_2(0/0);$$

Graph zu Beispiel 2:



Einschub[9]: Grundlagen der Grenzwertrechnung

Um das Verhalten eines Polynoms f(x) für sehr große bzw. sehr kleine x – Werte zu untersuchen verwendet man folgende Schreibweise:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;\; bzw. \;\; \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Sprich: Limes von f von x für x gegen Plus (Minus) Unendlich

Bei Polynomen gehen beide Grenzwertbetrachtungen immer gegen unendlich große (bzw. kleine) Werte. Hier muss besonders auf das Vorzeichen des Grenzwertes geachtet werden! Für gebrochen rationale Funktionen ergibt sich bei der Grenzwertberechnung eine Vielzahl an Varianten! In Beispiel 1 und in Beispiel 2 (siehe Zeichnung) gilt:

1.

$$f(x)=\frac{x^2-7\cdot x+12}{x^2+3\cdot x+4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-7\cdot x+12}{x^2+3\cdot x+4}=1$$

2.

$$f(x)=\frac{x^2-2\cdot x}{x^2-1}$$

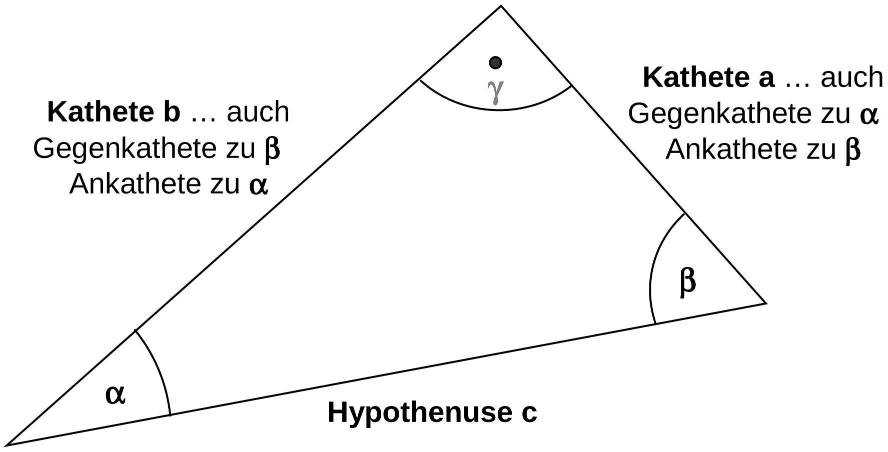
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2\cdot x}{x^2-1}=1$$

[9] Die Grenzwertrechnung – insbesondere für gebrochen rationale Funktionen - wird in Jahrgangsstufe 11 methodisch aufgearbeitet. In Jgst. 10 spielt sie noch keine tragende Rolle!

Die Trigonometrischen Funktionen

Grundwissen Mittelstufe / Bezeichnungen / Definitionen:

Im rechtwinkligen Dreieck gelte die folgende Standardbeschriftung mit den angegebenen Bezeichnungen …



Definitionen (Verhältnisgleichungen):

$$\mathbf{sin}\,\alpha = \frac{Gegenkathete\ zu\ \alpha}{Hypothenuse} = \frac{a}{c} \qquad \mathbf{cos}\,\alpha = \frac{Ankathete\ zu\ \alpha}{Hypothenuse} = \frac{b}{c}$$

$$\mathbf{sin}\,\beta = \frac{Gegenkathete\ zu\ \beta}{Hypothenuse} = \frac{b}{c} \qquad \mathbf{cos}\,\beta = \frac{Ankathete\ zu\ \beta}{Hypothenuse} = \frac{a}{c}$$

$$\mathbf{tan}\,\alpha = \frac{Gegenkathete\ zu\ \alpha}{Ankathete\ zu\ \alpha} = \frac{a}{b} \qquad \mathbf{tan}\,\beta = \frac{Gegenkathete\ zu\ \beta}{Ankathete\ zu\ \beta} = \frac{b}{a}$$

Folgerungen[10] und Eigenschaften[11]:

$$(I) \quad \mathbf{sin}\,\alpha = \mathbf{cos}\,\beta \qquad \mathbf{cos}\,\alpha = \mathbf{sin}\,\beta \qquad \mathbf{tan}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{tan}\,\beta}$$

$$(II) \quad \mathbf{sin}\,\alpha = \mathbf{cos}(90° - \alpha) \qquad \mathbf{cos}\,\alpha = \mathbf{sin}(90° - \alpha) \qquad \mathbf{tan}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{tan}(90° - \alpha)} \quad \ldots$$

$$(III) \quad \begin{matrix} (\mathbf{sin}\,\alpha)^2 + (\mathbf{cos}\,\alpha)^2 = 1 \\ (\mathbf{sin}\,\beta)^2 + (\mathbf{cos}\,\beta)^2 = 1 \end{matrix} \qquad (trigonometrischer\ Pythagoras)$$

---

[10] Beschränkung auf die wichtigste Auswahl!
[11] (I) und (II) folgen direkt aus den Verhältnisgleichungen;
(III) folgt aus: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{a}{c}\right)}_{=\mathbf{sin}\,\alpha}{}^2 + \underbrace{\left(\frac{b}{c}\right)}_{=\mathbf{cos}\,\alpha}{}^2 = 1 \Leftrightarrow (\mathbf{sin}\,\alpha)^2 + (\mathbf{cos}\,\alpha)^2 = 1;$

Konstruktion der trigonometrischen Funktionen[12]

Erweitert man den Definitionsbereich von φ durch rechtwinklige Dreiecke am Einheitskreis, so lässt sich für jeden beliebigen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ ein Funktionswert angeben! Die entstehenden Funktionen nennt man trigonometrische Funktionen!

Zu den Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen

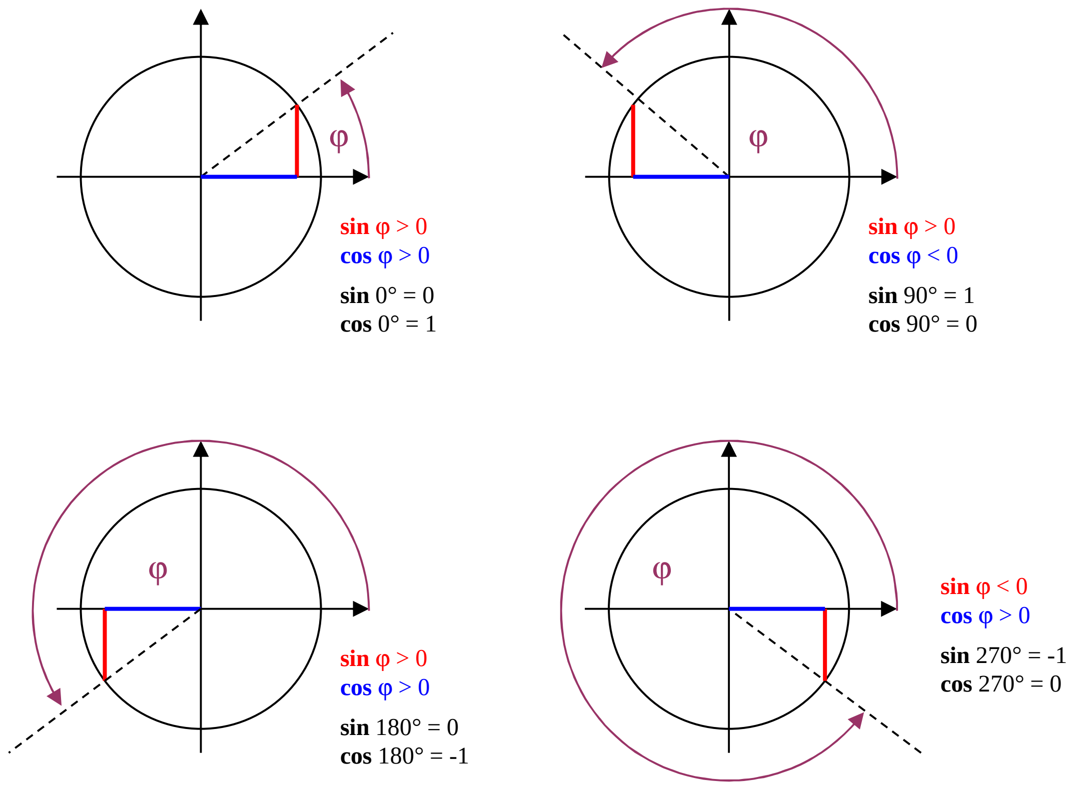


Tabelle:

φ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
sinφ	0	0,5	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0,5	0	-0,5	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	-0,5	0
cosφ	1	$\sqrt{3}/2$	0,5	0	-0,5	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	-0,5	0	0,5	$\sqrt{3}/2$	1
tanφ	0	1/√3	√3	n.d.	-√3	-1/√3	0	1/√3	√3	n.d.	-√3	-1/√3	0

Bemerkung 1:

Die Funktionswerte für Winkel φ > 360° bzw. φ < 0° erhält man durch Division mit Rest von φ durch 360° und dem zum Restwinkel gehörenden Funktionswert! Die Funktionswerte des Intervalls [0°; 360°] wiederholen sich ständig. Bei den trigonometrischen Funktionen handelt es sich um sog. periodische Funktionen!

Bemerkung 2:

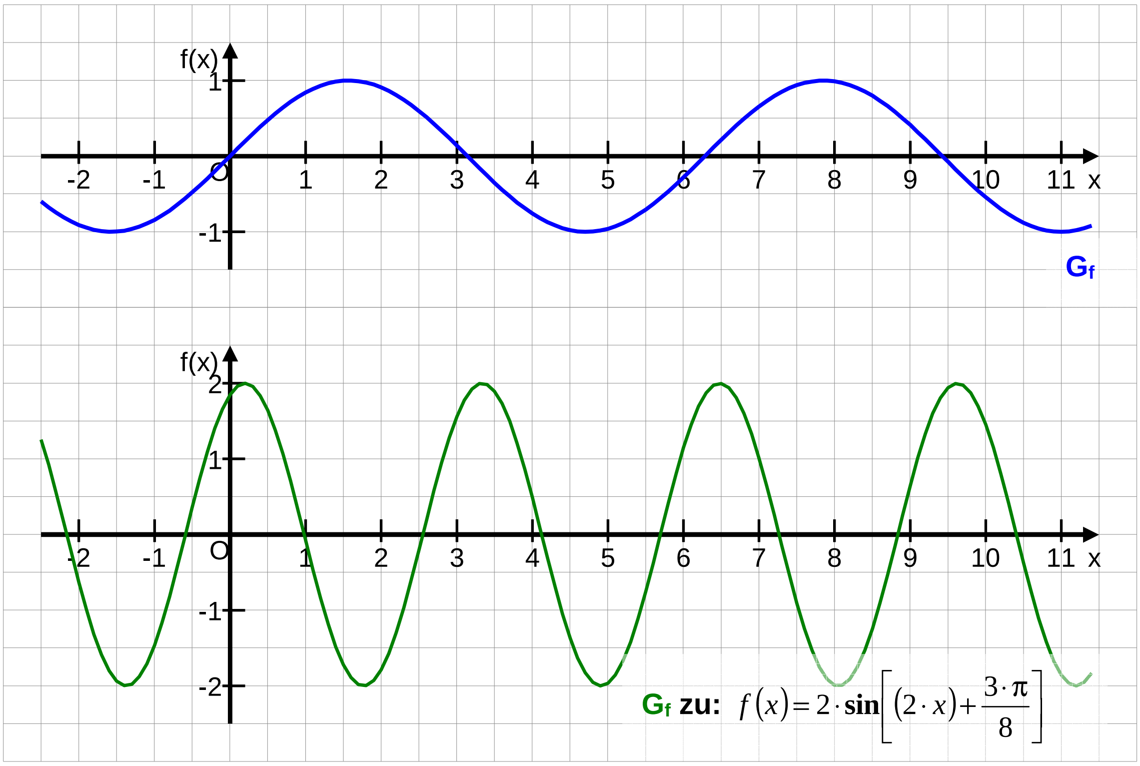
Verwendet man anstelle eines Winkels φ den Zahlenwert x der Länge des Einheitskreisbogens, der zu diesem Winkel gehört, so verwendet man das sog. Bogenmaß! Jeder beliebige Winkel lässt sich in das Bogenmaß umrechnen. Es gilt:

$$x = \frac{\pi}{180°} \cdot \varphi$$

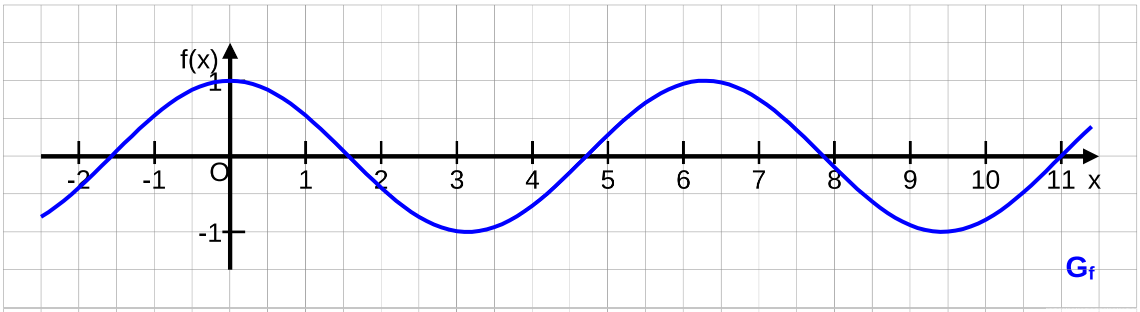
[12] Im folgenden wird auf die Behandlung der Tangensfunktion verzichtet (keine Relevanz)

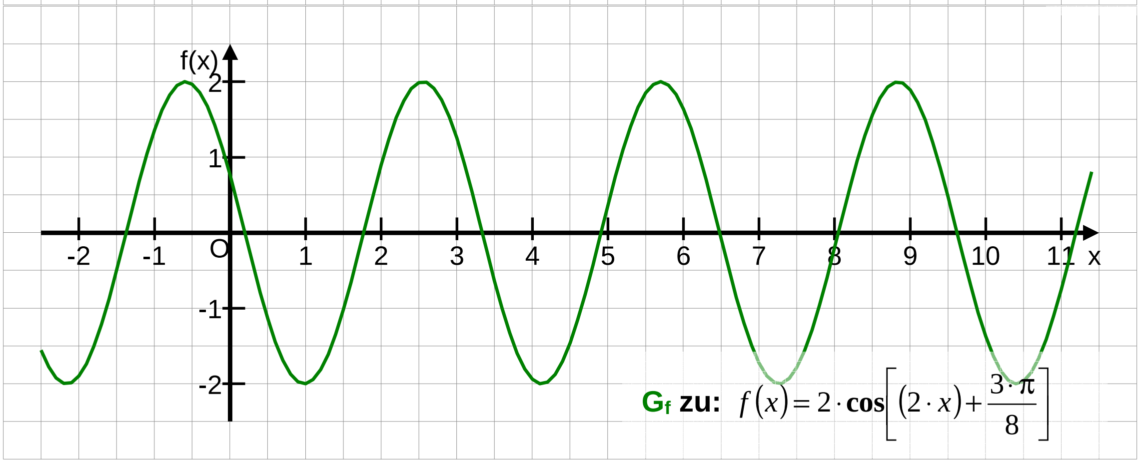
Eigenschaften der trigonometrischen Grundfunktionen

Funktionsterm	• $f(x) = \mathbf{sin}\, x$
Definitionsmenge ID_{max}	• $ID_{\mathbf{max}} = IR$
Wertemenge \W	• \W = [-1; +1]
Nullstellen	• **Nullstellen:** $[\mathbf{sin}\,\varphi = 0 \quad für \quad \varphi = k \cdot 180°]$ $\mathbf{sin}\, x = 0 \quad für \quad x = k \cdot \pi \quad (Bogenmaß)$ • Abszissenschnittpkte.: … • Ordinatenschnittpunkt: $S_y(0/0)$
Maxima	• $[\mathbf{sin}\,\varphi = 1 \quad für \quad \varphi = 90° + k \cdot 360°]$ $\mathbf{sin}\, x = 1 \quad für \quad x = \left(2 \cdot k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \quad (Bogenmaß)$
Minima	• $[\mathbf{sin}\,\varphi = -1 \quad für \quad \varphi = 270° + k \cdot 360°]$ $\mathbf{sin}\, x = 1 \quad für \quad x = \left(2 \cdot k - \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \quad (Bogenmaß)$
Symmetrieverhalten	• Der Graph der „primitiven“ Sinus – Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems!



Funktionsterm	• $f(x) = \cos x$
Definitionsmenge ID_{max}	• $ID_{\mathbf{max}} = IR$
Wertemenge \W	• \W = [-1; +1]
Nullstellen	• **Nullstellen:** $[\cos\varphi = 0 \;\; \text{für} \;\; \varphi = (2\cdot k+1)\cdot 90°]$ $\cos x = 0 \;\; \text{für} \;\; x = \left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi \quad (Bogenmaß)$ • Abszissenschnittpkte.: … • Ordinatenschnittpunkt: $S_y(0/1)$
Maxima	• $[\cos\varphi = 1 \;\; \text{für} \;\; \varphi = k\cdot 360°]$ $\cos x = 1 \;\; \text{für} \;\; x = 2\cdot k\cdot\pi \quad (Bogenmaß)$
Minima	• $[\cos\varphi = -1 \;\; \text{für} \;\; \varphi = 180° + k\cdot 360°]$ $\sin x = 1 \;\; \text{für} \;\; x = (2\cdot k-1)\cdot\pi \quad (Bogenmaß)$
Symmetrieverhalten	• Der Graph der „primitiven" Kosinus – Funktion ist achsensymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems!





Die Exponentialfunktion

Vorbemerkung (Rechenregeln für Potenzen):

Es seien a, b $\in$ IR\{0}, c eine beliebige positive reelle Zahl sowie n $\in$Q und m $\in$ IN.

Dann gilt:

$$(\alpha)\quad a^n \cdot a^m = \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{n-mal}\cdot \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m-mal} = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{(n+m)-mal} = a^{n+m}$$

$$(\beta)\quad a^n \cdot b^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{n-mal}\cdot \underbrace{(b\cdot b\cdot \ldots \cdot b)}_{n-mal} = \underbrace{(a\cdot b)\cdot (a\cdot b)\cdot \ldots \cdot (a\cdot b)}_{n-mal} = (a\cdot b)^n$$

$$(\gamma)\quad \frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}^{n-mal}}{\underbrace{(b\cdot b\cdot \ldots \cdot b)}_{n-mal}} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot \ldots \cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{n-mal} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(\delta)\quad a^n : a^m = \frac{\overbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}^{n-mal}}{\underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m-mal}} = \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{(n-m)-mal} = a^{n-m}$$

$$n > m: \qquad a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$n = m: \qquad \left\{\begin{array}{l} a^n : a^m = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 \\ a^n : a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow a^0 = 1$$

$$n < m: \quad a^n : a^m = a^{n-m} = a^{-(m-n)} = a^{0-(m-n)} = \frac{1}{a^{(m-n)}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{(m-n)}$$

$$(\varepsilon)\quad \left(a^n\right)^m = \underbrace{\left(a^n\right)\cdot\left(a^n\right)\cdot \ldots \cdot\left(a^n\right)}_{m-mal} \overset{(\alpha)}{=} a^{n+n+\ldots+n} = a^{m\cdot n}$$

$$Wichtig: \quad a^{m\cdot n} = a^1 = a \;\rightarrow m\cdot n = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{m}$$

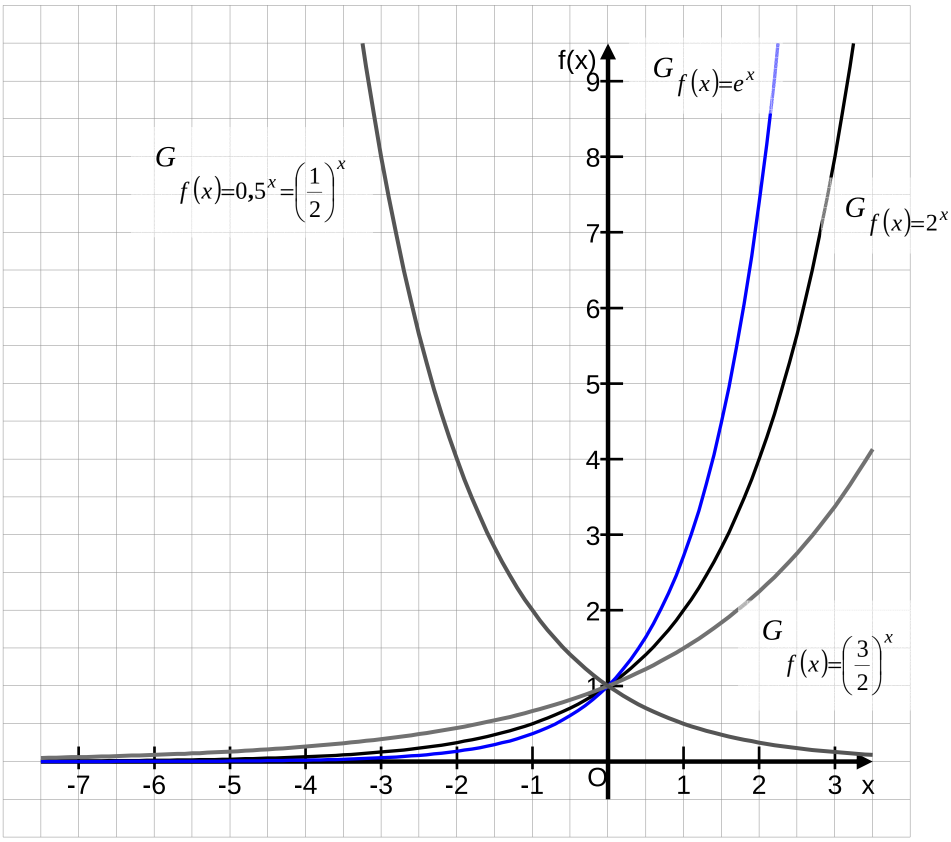
$$(\varepsilon)\quad f\ddot{u}r\ gerades\ m: \; c^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{c} \quad \rightarrow c^{\frac{n}{m}} = \underbrace{\sqrt[m]{c^n} = \left(\sqrt[m]{c}\right)^n}_{nach\ (\varepsilon)\ und\ dem}$$

Kommutativgesetz der Multiplikation

Eigenschaften der Exponentialfunktion

Funktionsterm	• $f(x)=a^x \quad mit: \ a\in IR^+ \ und \ a\neq 1$
Definitionsmenge ID_{max}	• $ID_{\mathbf{max}} = IR$
Wertemenge \W	• \W =] 0; +∞]
besondere Punkte	• Nullstellen: **keine** • Abszissenschnittpkte.: **keine** • Ordinatenschnittpunkt: $S_y(0/1)$
Monotonieverhalten	• Der Funktionsgraph G_f ist streng monoton steigend für a > 1 • Der Funktionsgraph G_f ist streng monoton fallend für 0 < a < 1
	• Aufgrund der Monotonie ist f(x) umkehrbar (siehe allgemeiner Teil). Die Umkehrfunktion ergibt sich zu: $f^{-1}(x)=\mathbf{log}_a x$

Funktionsgraphen (Beispiele):



Die Logarithmusfunktion

Vorbemerkung (Rechenregeln für Logarithmen):

Es seien a, b, c $\in$ $IR^+\backslash\{1\}$, k $\in$ IR, n $\in$ IN.

Dann gilt:

$$(\alpha)\quad a^x = b \Leftrightarrow x = \mathbf{log}_a\, b$$

$$a^1 = a \Leftrightarrow \mathbf{log}_a\, a = 1$$

$$a^0 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{log}_a\, 1 = 0$$

$$(\alpha)\quad \mathbf{log}_a\, b + \mathbf{log}_a\, c = \mathbf{log}_a (b \cdot c)$$

$$(\beta)\quad \mathbf{log}_a\, b - \mathbf{log}_a\, c = \mathbf{log}_a \left(\frac{b}{c}\right)$$

$$(\gamma)\quad \mathbf{log}_a\, b^n = \mathbf{log}_a \underbrace{(b \cdot b \cdot \mathbf{...} \cdot b)}_{n-mal} = \underbrace{\mathbf{log}_a\, b + \mathbf{log}_a\, b + \mathbf{...} + \mathbf{log}_a\, b}_{n-mal} = n \cdot \mathbf{log}_a\, b$$

Aus (α) und (γ) folgt insbesondere:

$$a^x = b \Leftrightarrow \mathbf{log}_a\, a^x = \mathbf{log}_a\, b \Leftrightarrow x \cdot \mathbf{log}_a\, a = \mathbf{log}_a\, b \Leftrightarrow x = \frac{\mathbf{log}_a\, b}{\mathbf{log}_a\, a} = \mathbf{log}_a\, b$$

aber auch:

$$a^x = b \Leftrightarrow \mathbf{log}_c\, a^x = \mathbf{log}_c\, b \Leftrightarrow x \cdot \mathbf{log}_c\, a = \mathbf{log}_c\, b \Leftrightarrow x = \frac{\mathbf{log}_c\, b}{\mathbf{log}_c\, a}$$

$$\Rightarrow a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \quad x = \dfrac{\mathbf{log}_{10}\, b}{\mathbf{log}_{10}\, a} = \dfrac{\mathbf{lg}\, b}{\mathbf{lg}\, a} \\ \\ (ii) \quad x = \dfrac{\mathbf{log}_e\, b}{\mathbf{log}_e\, a} = \dfrac{\mathbf{ln}\, b}{\mathbf{ln}\, a} \end{cases}$$

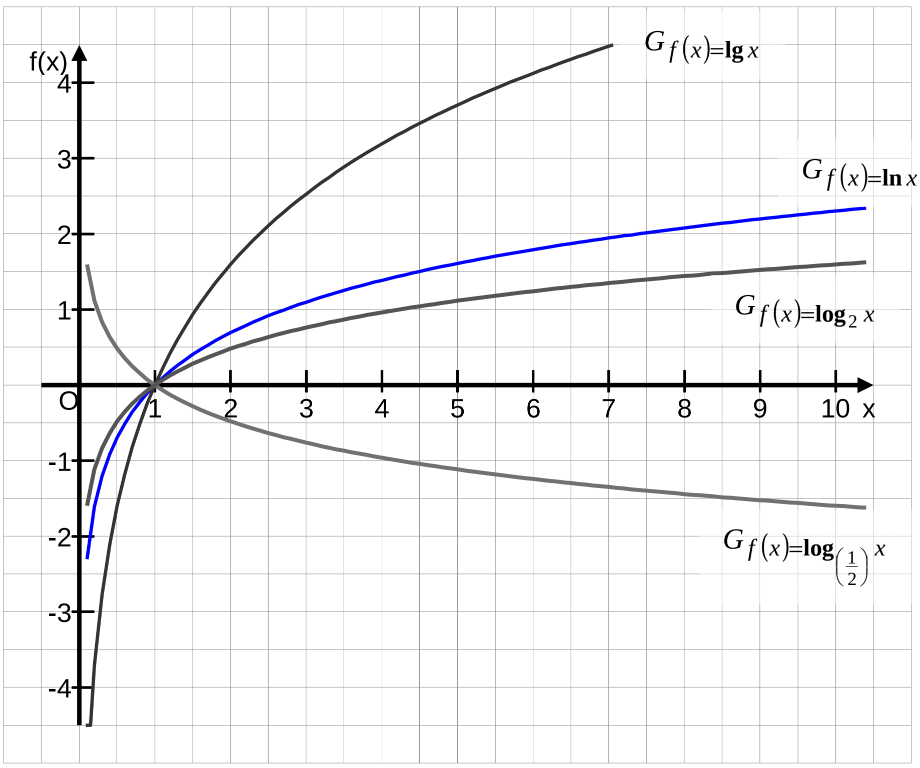
Bemerkung:

Das Lösen von Exponentialgleichungen ist unabhängig von der verwendeten logarithmischen Basis!

Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Funktionsterm	• $f(x) = \log_a x \quad mit: \; a \in IR^+ \; und \; a \neq 1$
	• alternativ: $f(x) = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$
Definitionsmenge ID_{max}	• ID_{max} =] 0; +∞]
Wertemenge \W	• \W = IR
besondere Punkte	• Nullstellen: **x = 1** • Abszissenschnittpkte.: **N(1 / 0)** • Ordinatenschnittpunkt: ---
Monotonieverhalten	• Der Funktionsgraph G_f ist streng monoton steigend für a > 1 • Der Funktionsgraph G_f ist streng monoton fallend für 0 < a < 1
	• Aufgrund der Monotonie ist f(x) umkehrbar (siehe allgemeiner Teil). Die Umkehrfunktion ergibt sich zu: $f^{-1}(x) = a^x$

Funktionsgraphen (Beispiele):

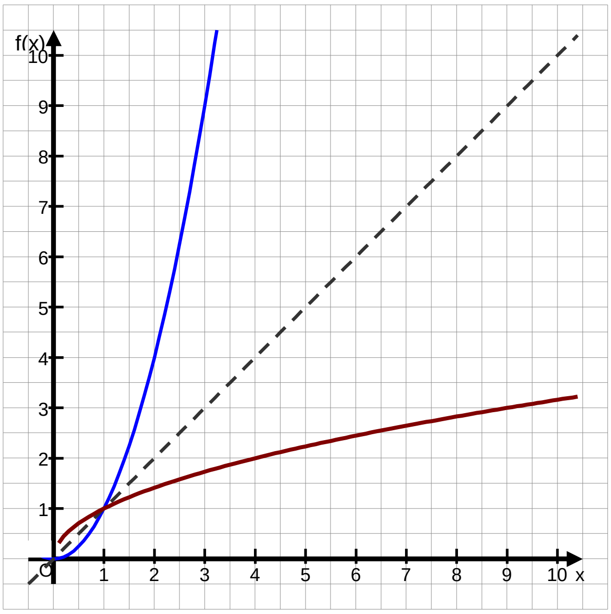


Ergänzungen

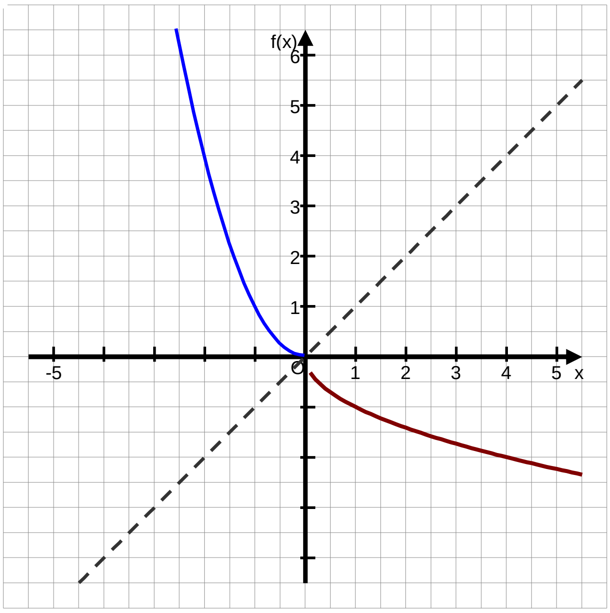
Die Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion ergibt sich als Umkehrfunktion der Funktion

$$1)\quad f(x)=x^2 \quad mit \begin{cases} ID_f = IR_0^+ \\ IW_f = IR_0^+ \end{cases} \rightarrow \quad f^{-1}(x)=+\sqrt{x} \quad mit \begin{cases} ID_{f^{-1}} = IR_0^+ \\ IW_{f^{-1}} = IR_0^+ \end{cases}$$



$$2)\quad f(x)=x^2 \quad mit \begin{cases} ID_f = IR_0^- \\ IW_f = IR_0^+ \end{cases} \rightarrow \quad f^{-1}(x)=-\sqrt{x} \quad mit \begin{cases} ID_{f^{-1}} = IR_0^+ \\ IW_{f^{-1}} = IR_0^- \end{cases}$$



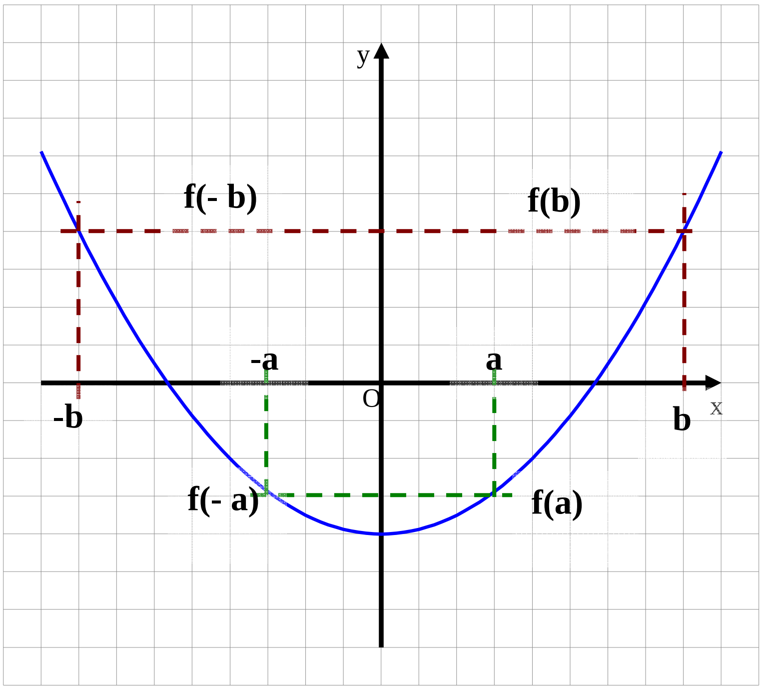
Punkt- und Achsensymmetrie bei Funktionen

Vorbemerkung:
Graphen von Funktionen können …

- achsensymmetrisch zu einer Geraden g, die parallel zur y – Achse des Koordinatensystems verläuft, sein (oder aber zur y – Achse selbst achsensymmetrisch sein)
- punktsymmetrisch zu einem Punkt im Koordinatensystems sein
- keinerlei Symmetrieverhalten besitzen (das ist die Regel!)

Offensichtliches Symmetrieverhalten von Funktionsgraphen liegt vor, wenn die Symmetrieachse bei Achsensymmetrie mit der y – Achse des KKS identisch ist oder aber das Symmetriezentrum bei Punktsymmetrie mit dem Ursprung übereinstimmt!

Kriterium für offensichtliche Achsensymmetrie



Man erkennt:
Für den Spiegelpunkt P_S eines Punktes P gilt:

$$P(x/y) \Leftrightarrow P_S(-x/y), \; d.h.:$$

Ist eine Funktion f achsensymmetrisch zur y – Achse so gibt es zu jedem $P(x/f(x)) \in G_f$ einen Spiegelpunkt $P_S(-x/f(-x)) \in G_f$ mit der Eigenschaft

$$f(-x) = f(x)$$

Beispiel 1:

$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2$ ist wegen: $f(-x) = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{(-x)^2}_{=x^2} - 2 = f(-x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2 = f(x)$ achsensymmetrisch zur y – Achse!

Beispiel 2:

$f(x) = \frac{x^4 - 2 \cdot x^2}{1 - x^2}$ ist wegen: $f(-x) = \frac{(-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2}{1 - (-x)^2} = \frac{x^4 - 2 \cdot x^2}{1 - x^2} = f(x)$ achsensymmetrisch zur y – Achse!

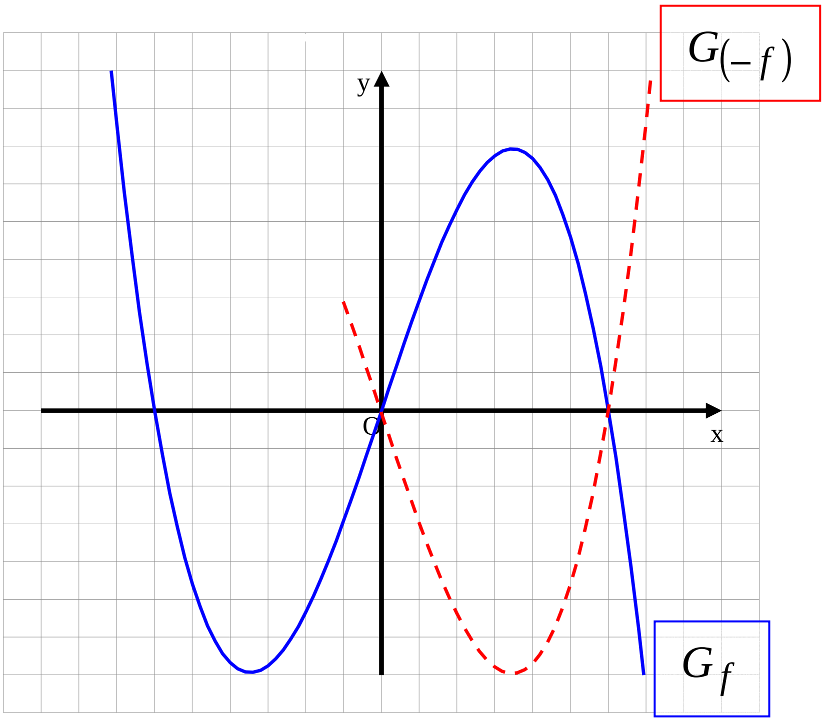
Beispiel 3:

$f(x)=x^6-3\cdot x^2-\frac{13}{7}$ ist wegen: $f(-x)=(-x)^6-3\cdot(-x)^2-\frac{13}{7}=x^6-3\cdot x^2-\frac{13}{7}=f(x)$ achsensymmetrisch zur y – Achse!

Beispiel 4:

$f(x)=x^4-x+1$ besitzt wegen: $f(-x)=(-x)^4-(-x)+1=x^4+x+1\neq f(x)$ kein offensichtliches Symmetrieverhalten!

Kriterium für offensichtliche Punktsymmetrie



Der blaue Graph in der Skizze ist offensichtlich punktsymmetrisch zum Ursprung!

Wir spiegeln den Teil des Graphen G_f, der in den Quadranten I und IV verläuft durch Multiplikation der Funktionswerte $f(x)$ mit (-1):

$$f(x)\xrightarrow{\cdot(-1)}-f(x)$$

an der x – Achse! Nun ist G_f in den Quadranten II und III achsensymmetrisch zu $G_{(-f)}$ in den Quadranten I und IV.

Damit gilt:

Ein Funktionsgraph G_f ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn er (nach geeigneter Spiegelung) achsensymmetrisch zu $G_{(-f)}$ ist. Das heißt:

G_f ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x)=-f(x)$

Bemerkung:
Analog zur beschriebenen Vorgehensweise lässt sich auch der Bereich im II und III Quadranten an der x – Achse spiegeln (unter Beibehaltung des Verlaufs im I und IV Quadranten). Dann ergilbt sich das äquivalente Kriterium:

G_f ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(x)=-f(-x)$

Beispiel 5:

$f(x) = \frac{3}{2} \cdot x^3 - 2 \cdot x$ ist wegen:

$f(-x) = \frac{3}{2} \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x) = -\frac{3}{2} \cdot x^3 + 2 \cdot x = -\left(\frac{3}{2} \cdot x^3 - 2 \cdot x\right) = -f(x)$

punktsymmetrisch zum Ursprung!

Beispiel 6:

$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^5 - 2 \cdot x$ ist wegen:

$f(-x) = \frac{1}{3} \cdot (-x)^5 - 2 \cdot (-x) = -\frac{1}{3} \cdot x^5 + 2 \cdot x = -\left(\frac{1}{3} \cdot x^5 - 2 \cdot x\right) = -f(x)$

punktsymmetrisch zum Ursprung!

Beispiel 7:

$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x + 1$ ist wegen:

$f(-x) = \frac{1}{3} \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x) + 1 = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot x + 1 = -\left(\frac{1}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x - 1\right) \neq -f(x)$

natürlich nicht punktsymmetrisch zum Ursprung!

Für ganzrationale Funktionen gilt generell:

Treten nur geradzahlige Exponenten (0, 2, 4, 6, …) auf, so ist der Graph des Polynoms achsensymmetrisch zur y – Achse des Koordinatensystems ($(-x)^{2 \cdot k} = \left((-x)^2\right)^k = \left(x^2\right)^k = x^{2 \cdot k}$)!

Treten nur ungeradzahlige Exponenten (1, 3, 5, 7, …) auf, so ist der Graph des Polynoms punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems ($(-x)^{2 \cdot k+1} = \left((-x)^2\right)^k \cdot (-x)$ $= \left(x^2\right)^k \cdot (-x) = -x^{2 \cdot k+1}$)!

Wichtig: Konstanten sind „Potenzen mit geradzahligem Exponenten“ wegen: $a = a \cdot 1 = a \cdot x^0$

Verknüpfungen von Funktionen mit offensichtlichem Symmetrieverhalten

Behauptung 1:

Es seien $h(x)$ und $g(x)$ zur y – Achse achsensymmetrische Funktionen. Dann sind auch[13] …

$f_1(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ und $f_2(x)=h(x)\cdot g(x)$ zur y – Achse achsensymmetrische Funktionen.

Beweis:

Es gilt: $h(x)=h(-x)$ und $g(x)=g(-x)$

$$f_1(-x)=\frac{h(-x)}{g(-x)}=\frac{h(x)}{g(x)}=f_1(x) \quad \text{und} \quad f_2(-x)=h(-x)\cdot g(-x)=h(x)\cdot g(x)=f_2(x)$$

Behauptung 2:

Es sei $h(x)$ eine zum Ursprung punktsymmetrische und $g(x)$ eine zur y – Achse achsensymmetrische Funktion. Dann sind …

$f_1(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ und $f_2(x)=h(x)\cdot g(x)$ zum Ursprung punktsymmetrische Funktionen.

Beweis:

Es gilt: $h(-x)=-h(x)$ und $g(x)=g(-x)$

$$f_1(-x)=\frac{h(-x)}{g(-x)}=\frac{[-h(x)]}{g(x)}=-f_1(x) \quad \text{u.} \quad f_2(-x)=h(-x)\cdot g(-x)=[-h(x)]\cdot g(x)=-f_2(x)$$

Behauptung 3:

Es seien $h(x)$ und $g(x)$ zum Ursprung punktsymmetrische Funktionen. Dann sind …

$f_1(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ und $f_2(x)=h(x)\cdot g(x)$ zur y – Achse achsensymmetrische Funktionen.

Beweis:

Es gilt: $h(-x)=-h(x)$ und $g(-x)=-g(x)$

$$f_1(-x)=\frac{h(-x)}{g(-x)}=\frac{[-h(x)]}{[-g(x)]}=f_1(x) \quad \text{u.} \quad f_2(-x)=h(-x)\cdot g(-x)=[-h(x)]\cdot[-g(x)]=f_2(x)$$

Beispiele:

[13] Zähler und Nenner dürfen bei f_1 immer vertauscht werden ohne dass sich die Aussage bzgl. der Symmetrie verändert! Beachten Sie jedoch immer die jeweilige Definitionsmenge der gebrochen rationalen Funktion!

a) Die Funktion: $f(x)=\frac{1}{5}\cdot x^{10}-9\cdot x^8+5\cdot x^4-3\cdot x^2+7$ ist achsensymmetrisch (nur geradzahlige Exponenten)
b) Die Funktion: $f(x)=x^7-9\cdot x^6-3\cdot x^4-3\cdot x^3+7$ ist weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch (geradzahlige und ungeradzahlige Exponenten vorhanden)
c) Die Funktion: $f(x)=\frac{x^3-7\cdot x}{x^2+9}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung („punktsymmetrischer Zähler“ : „achsensymmetrischen Nenner“)
d) Die Funktion: $f(x)=\frac{x^3-5\cdot x}{\sin x}$ ist achsensymmetrisch („punktsymmetrischer Zähler“ : „punktsymmetrischen Nenner“)

…

Nicht offensichtliche Symmetrien (nicht relevant):

Achsensymmetrie zu einer Parallelen zur y – Achse:

Es sei a eine Parallele zur y – Achse. Die Funktion $f(x)$ ist dann achsensymmetrisch zu a, wenn:

$$f(-x+a)=f(x+a)$$

Überlegung:

Verschieben Sie die zur y – Achse achsensymmetrische Funktion h(x) um a und setzen Sie $f(x)=h(x-a)$! Dann folgt mit:

$$\left.\begin{array}{l} h(-x)=h((-x+a)-a)=f(-x+a) \\ h(x)=h((x-a)+a)=f(x+a) \end{array}\right\} \xrightarrow{h(x)=h(-x)} f(-x+a)=f(x+a)$$

Punktsymmetrie zu einem beliebigen Punkt P(a / b)

Es sei P ein beliebiger Punkt. Die Funktion $f(x)$ ist dann punktsymmetrisch zu P, wenn:

$$b-f(x+a)=f(-x+a)-b \Leftrightarrow f(-x+a)+f(x+a)=2\cdot b$$

Begründung:

Betrachten Sie den Graphen G_h der zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion $h(x)$; G_f entstehe durch die Verschiebung von G_h um a in Richtung der x – Achse und um b in Richtung der y - Achse: Es gilt: $f(x)=h(x-a)+b$!

$$h(-x)=h((-x+a)-a)=\underbrace{h((-x+a)-a)+b}_{f(-x+a)}-b=f(-x+a)-b+b-b=f(-x+a)-b$$

$$-h(x)=-h((x+a)-a)=\underbrace{-h((x+a)-a)-b}_{-f(x+a)}+b-b=-f(x+a)+b+b-b=b-f(x+a)$$

$$\xrightarrow{h(-x)=-h(x)} f(-x+a)-b=b-f(x+a)$$

Grundwissen Stochastik (10 Klasse)

Vierfeldertafel

Gegeben seien stochastische Merkmalsträger M mit den Ausprägungen A und B. Die Merkmalsträger lassen sich nach verschiedenen Kriterien sortieren. Man unterscheidet folgende Fälle:

A. Sortierung nach einzelnen Ausprägungen (Rand ~ / Marginalauswahl)

I. Welche Merkmalsträger besitzen die Ausprägung A / welche nicht?

II. Welche Merkmalsträger besitzen die Ausprägung B / welche nicht?

B. Sortierung nach gemeinsamen Ausprägungen (Vierfelderauswahl)

I. Merkmalsträger besitzen die Ausprägung A und B.

kurz: $M \rightarrow (A \cap B)$

II. Merkmalsträger besitzen die Ausprägung A aber nicht die Ausprägung B.

kurz: $M \rightarrow (A \cap \overline{B})$

III. Merkmalsträger besitzen die Ausprägung B aber nicht die Ausprägung A.

kurz: $M \rightarrow (\overline{A} \cap B)$

IV. Merkmalsträger besitzen weder die Ausprägung A noch die Ausprägung B.

kurz: $M \rightarrow (\overline{A} \cap \overline{B})$

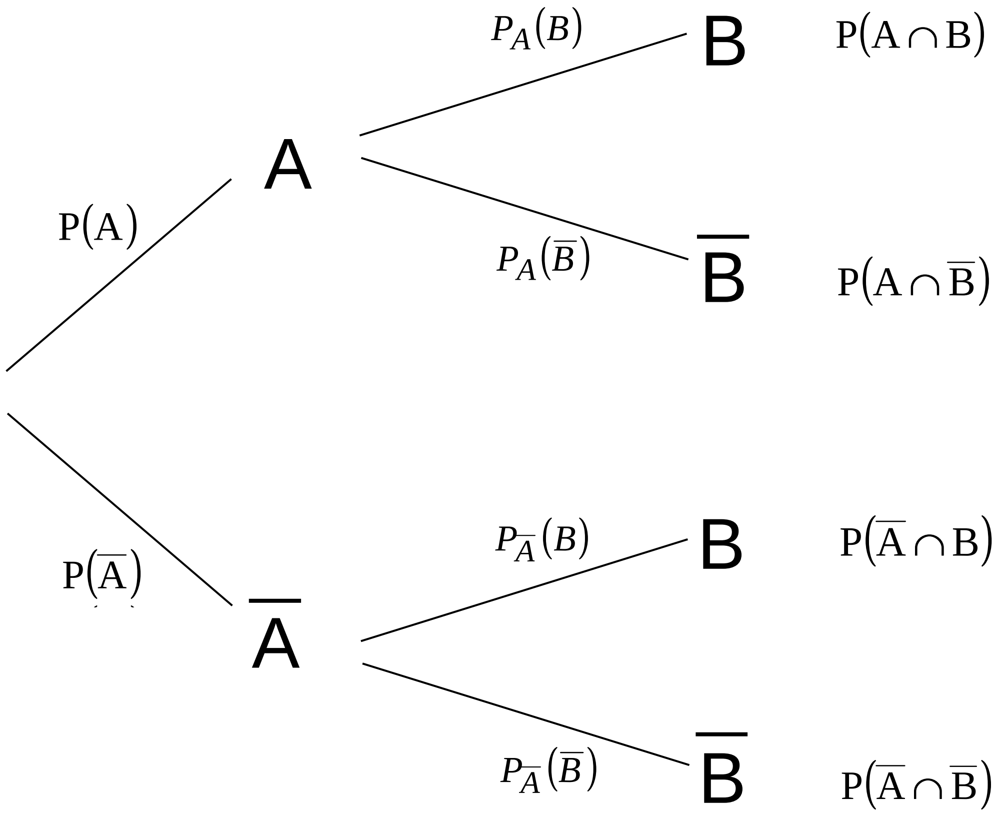
Bemerkung:

Die Verteilungen der absoluten und der relativen Häufigkeiten sowie der Wahrscheinlichkeiten lassen sich in einer sog. Kontingenztabelle (speziell: Vierfeldertafel) zusammenfassen!

Beispiel einer Kontingenztabelle für Wahrscheinlichkeiten:

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
$\sum$	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Baumdiagramme zweistufiger Zufallsexperimente:



Bedingte Wahrscheinlichkeit:

Für die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses B unter der Hypothese, dass das Ereignis A bereits eingetreten ist, gilt nach der Vierfeldertafel:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{Formel von Bayes}$$

Bemerkung 1:

Gilt: $P_A(B) = P(B)$ so nennt man die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig!

Bemerkung 2:

Als hilfreich erweist sich oft auch der folgende Zusammenhang (Stoff der Jgst. 8):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Grundwissen Geometrie (10. Klasse)

Bogenmaß:

- siehe Kapitel der trigonometrischen Funktionen!

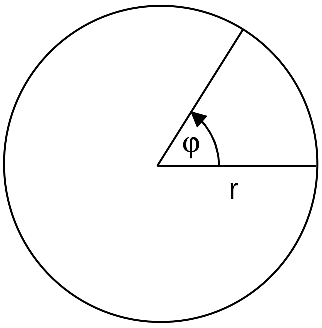
Wichtige Formeln zur Kreisberechnung:

- Kreisumfangslänge U: $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ (r = Kreisradius)
- Kreisflächeninhalt A: $A = r^2 \cdot \pi$
- Kreisbogenlänge[14] Bφ über dem Mittelpunktswinkel φ:

$$B_\varphi = \frac{\pi \cdot r}{180°} \cdot \varphi$$

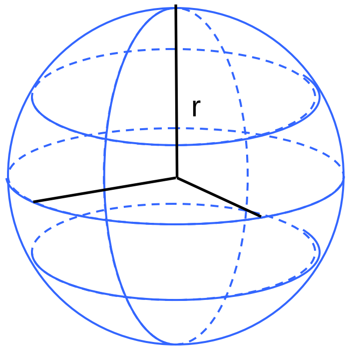
- Kreissektorfläche Aφ zum Mittelpunktswinkel φ:

$$A_\varphi = \frac{\pi \cdot r^2}{360°} \cdot \varphi$$



Wichtige Formeln zur Kugelberechnung:

- Oberflächeninhalt O: $O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$ (r = Kugelradius)
- Kugelvolumen V: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$



[14] Die Kreisbogenlänge ermöglicht eine elegante Definitionsmöglichkeit für das Bogenmaß:

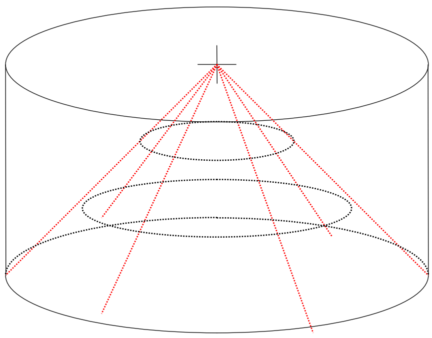
$$x = \frac{\pi}{180°} \cdot \varphi = \frac{\frac{\pi \cdot r}{180°} \cdot \varphi}{r} = \frac{B_\varphi}{r}.$$

In dieser Definitionsvariante ist das Bogenmaß von vorneherein einheitenfrei (man muss beim Beschreiben nicht so einen Eiertanz aufführen!).

Anhang

Das Kugelvolumen:

Wir betrachten einmal einen Zylinder mit der Höhe r und dem Grundkreisradius r, aus dem ein Kegel mit der Höhe r und dem Grundkreisradius r ausgeschnitten wurde, zum anderen eine Halbkugel mit dem Kugelradius r (siehe Bild 2).



Körper 1

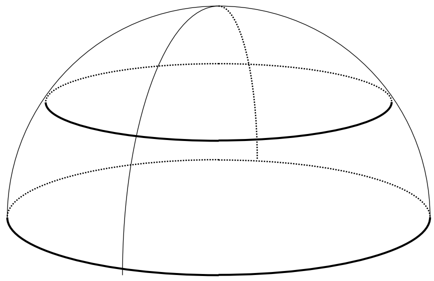
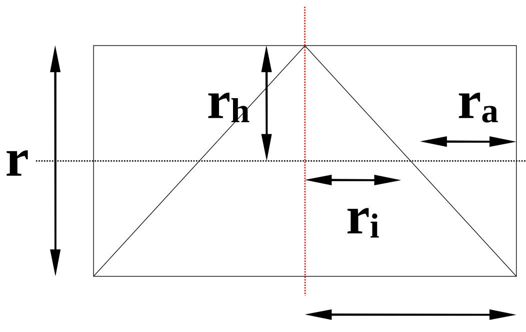


Bild 2

Eine Ebene E schneide den Körper 1 und die Halbkugel in derselben Höhe r_h (Seitenansicht mit Bemaßung siehe Bild 3).



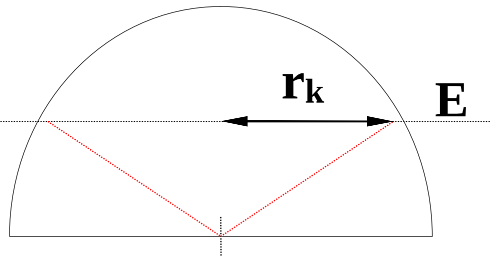
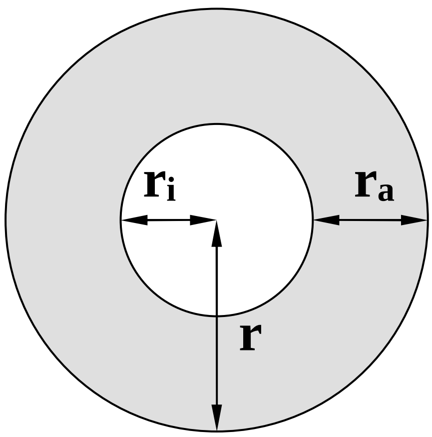


Bild 3

Behauptung:

Die Schnittflächen (siehe Bild 4) sind Flächengleich!



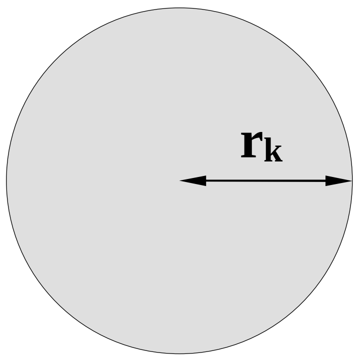


Bild 4

Beweis:

Zum Kreisring:

$$\frac{r_h}{r} = \frac{r_i}{r} \Leftrightarrow r_h = r_i \Rightarrow r_a = r - r_i = r - r_i$$

$$\Rightarrow A_{Ring} = r^2 \cdot \pi - r_i^2 \cdot \pi = \left(r^2 - r_i^2\right) \cdot \pi$$

Zum Kreis:

$$r_k^2 + r_h^2 = r^2 \Rightarrow r_k^2 = r^2 - r_h^2 = r^2 - r_i^2$$

$$A_{Kreis} = r_k^2 \cdot \pi = \left(r^2 - r_i^2\right) \cdot \pi$$

Man erkennt:

Für jeden - zur Grundfläche parallelen - Schnitt erhält man für den Körper 1 und die Halbkugel dieselbe Schnittfläche.

Mit dem Prinzip von Kavalieri gilt: Das Volumen der Halbkugel ist gleich dem Volumen von Körper 1.

Bestimmung des Volumens:

$$\boxed{V_{K1} = V_{Zy} - V_K = r_z^2 \cdot \pi \cdot h_z - \frac{1}{3} \cdot r_k^2 \cdot \pi \cdot h_k = r^2 \cdot \pi \cdot r - \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot r = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.}$$

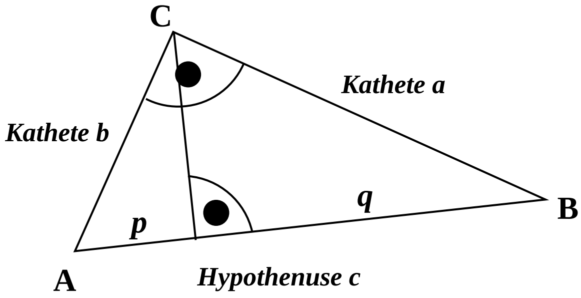
Für das Kugelvolumen erhält man durch diese Überlegungen die Formel:

$$\boxed{V_{Kugel} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi}$$

Die Satzgruppe des Pythagoras

Vorbemerkung / Bezeichnungen

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck in Standardbeschriftung. Es gelten verbindlich die Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze.
Beachte:
Die am rechten Winkel anliegenden Seiten heißen Katheten; die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt Hypothenuse. Die Teilstrecken p und q die durch die Teilung der Hypothenuse durch die Höhe auf c entstehen heißen Hypothenusenabschnitte!

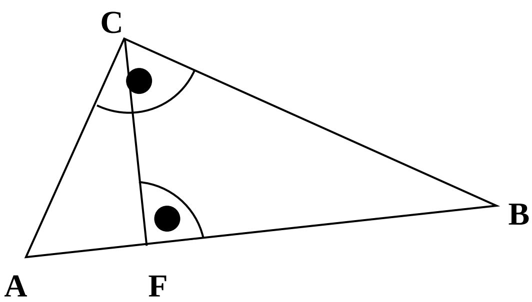


Standardbeschriftung

Es gilt:

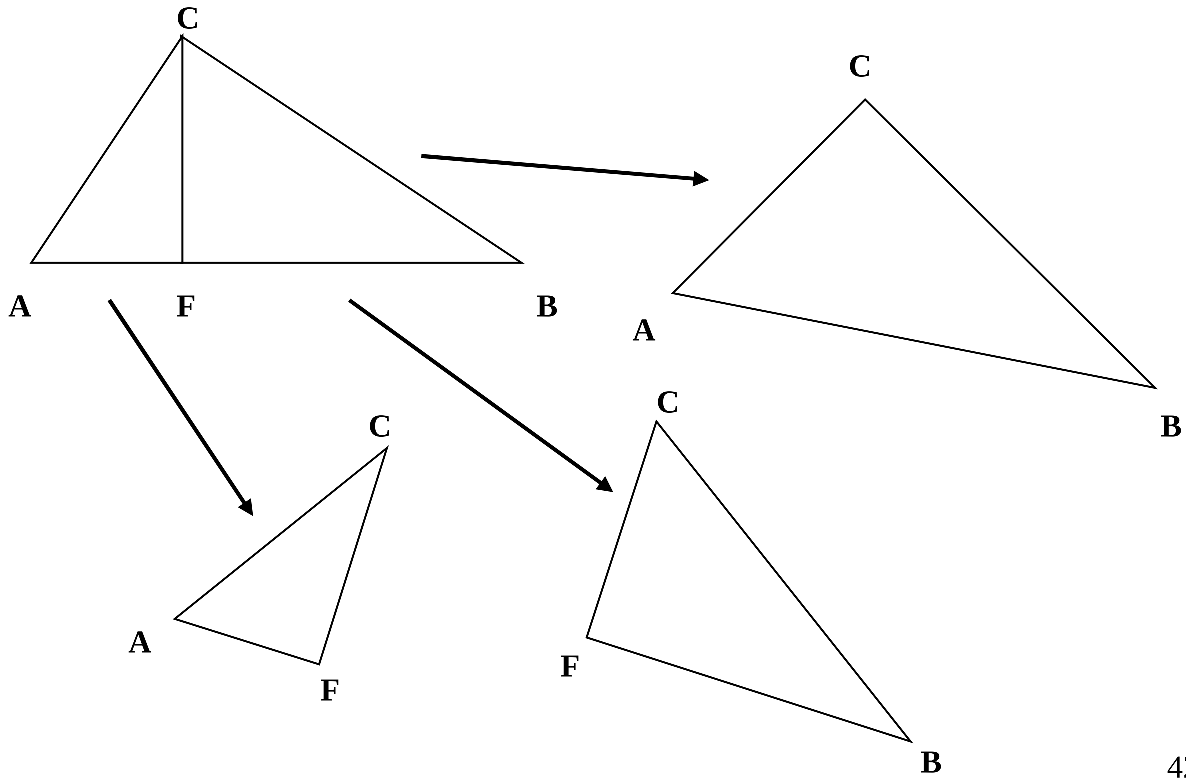
Δ ABC ≈ Δ CAF ≈ Δ BCF

[nach (www)]



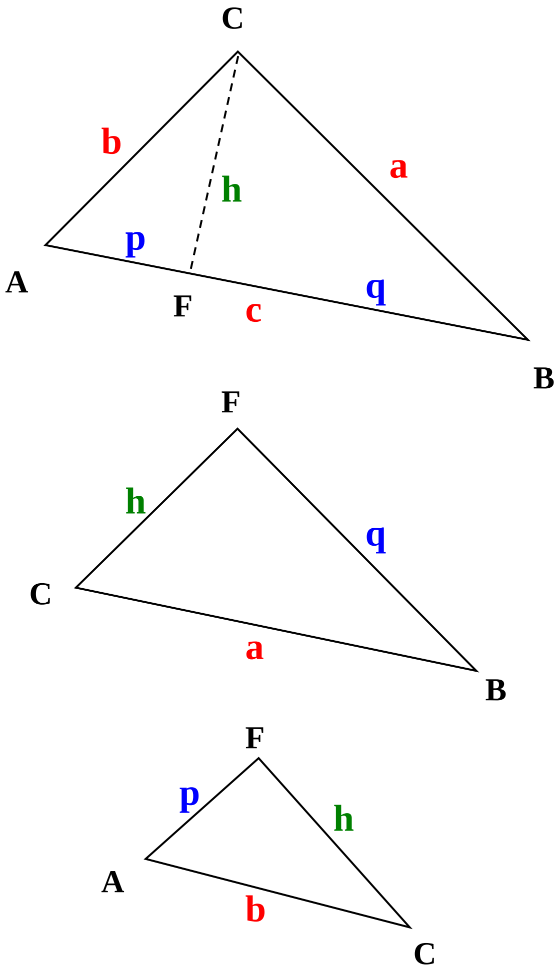
Aus dem Strahlensatz folgt: Sich entsprechende Verhältnisse in den Dreiecken sind gleich!

Damit folgt (Zerlegung in Teildreiecke vereinfacht die Übersicht):



Herleitung der Satzgruppe

Durch eine geeignete Drehung lassen sich entsprechende Stücke der Dreiecke leichter erkennen! Mit den Standardbezeichnungen der Seiten folgen die Verhältnisgleichungen:



$[1]\quad \frac{c}{a} = \frac{a}{q} \Leftrightarrow a^2 = q \cdot c$

$[2]\quad \frac{c}{b} = \frac{b}{p} \Leftrightarrow b^2 = p \cdot c$

$[3]\quad \frac{h}{q} = \frac{p}{h} \Leftrightarrow h^2 = q \cdot p$

Aus [1] und [2] folgt insbesondere:

$$a^2 + b^2 = q \cdot c + p \cdot c = \underbrace{(q + p)}_{=c} \cdot c = c^2$$

Diese vier Sätze sind fundamental sowohl für die Algebra und die Geometrie. Ihre Entdeckung wird dem griechischen Mathematiker Pythagoras zugeschrieben; man nennt sie deshalb auch Satzgruppe des Pythagoras!

Im Detail:

$[1]\quad \frac{c}{a} = \frac{a}{q} \Leftrightarrow a^2 = q \cdot c$ heißt Kathetensatz

$[2]\quad \frac{c}{b} = \frac{b}{p} \Leftrightarrow b^2 = p \cdot c$ heißt Kathetensatz

$[3]\quad \frac{h}{q} = \frac{p}{h} \Leftrightarrow h^2 = q \cdot p$ heißt Höhensatz

$[4]\quad a^2 + b^2 = c^2$ heißt Satz des Pythagoras

Wortlaut:

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

[1] Das Quadrat über der Kathete a ist flächengleich zu dem Rechteck, das aus der Hypothenuse c und dem an der Kathete anliegenden Hypothenusenabschnitt q gebildet werden kann!

[2] Das Quadrat über der Kathete b ist flächengleich zu dem Rechteck, das aus der Hypothenuse c und dem an der Kathete anliegenden Hypothenusenabschnitt p gebildet werden kann!

[3] Das Quadrat über der Höhe h ist flächengleich zu dem Rechteck, das aus den Hypothenusenabschnitten p und q gebildet werden kann!

[4] Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten ist gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypothenuse.