Mathematatik

Erzbischöfliches Abendgymnasium
Bamberg

2022 / 2023

Inhaltsverzeichnis:

Analytische Geometrie

§ 0 Grundwissen

§ 0. 1 Definitionen / Rechenregeln:

a) Die Menge aller richtungsgleichen Pfeile derselben Länge (desselben Betrages) heißt Vektor (Bild 1). Ein einzelner Pfeil wird Repräsentant genannt. Der Repräsentant, dessen Anfangspunkt im Ursprung des KKS liegt heißt Ursprungsrepräsentant (auch: Ursprungsvektor).

b) Ein Vektor der Länge (vom Betrag) Eins heißt Einheitsvektor.

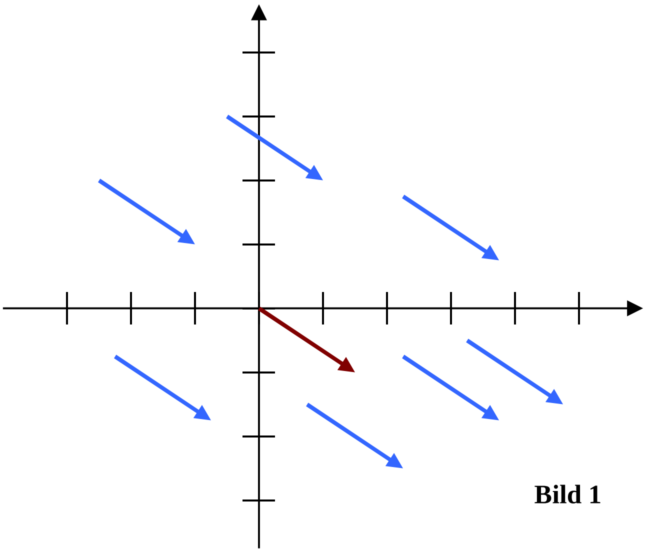


Bild 1

Schreibweise:

Jeder Repräsentant besitzt einen Anfangspunkt A(x_a; y_a) und einen Endpunkt E(x_e; y_e). Üblicherweise verwendet man zur Beschreibung des Vektors $\vec{v}$ die sog. Komponentendarstellung seines Ursprungsrepräsentanten $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,e} \\ y_{0,e} \end{pmatrix}$$

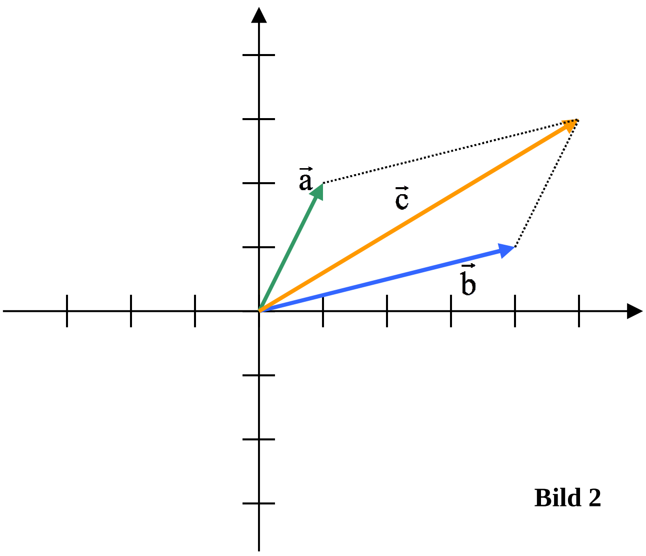


Bild 2

Rechenregeln für Vektoren:

Zwei Vektoren werden addiert (subtrahiert) indem man entsprechende Komponenten addiert (subtrahiert).

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \end{pmatrix}$$

Die Vektoraddition (-subtraktion) entspricht grafisch einer Parallelverschiebung des Anfangspunktes (Endpunktes) des Repräsentanten $\vec{a}$ in den Endpunkt (Endpunkt) des Repräsentanten $\vec{b}$ (Bild 2).

Rechenregeln für Vektoren:

Ein Vektor wird mit einer Zahl multipliziert (sog. skalare Multiplikation), indem jede Vektorkomponente mit der Zahl multipliziert wird:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

Die skalare Multiplikation entspricht grafisch einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z(0;0) und dem Streckungsfaktor λ (Bild 3).

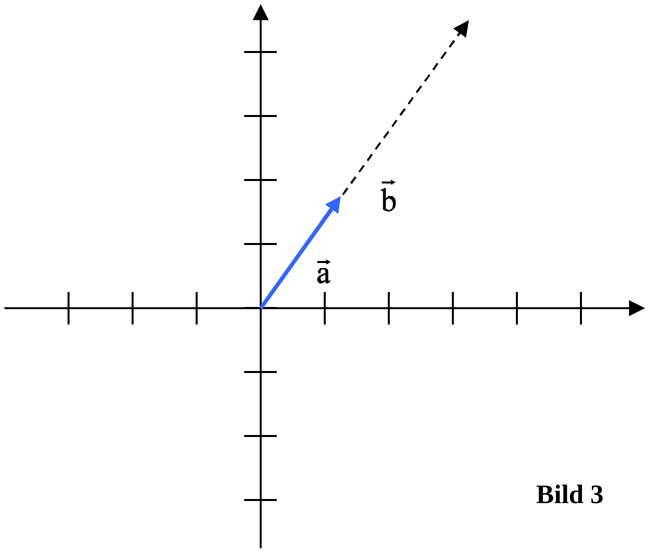


Bild 3

§ 0. 2. Folgerungen

Gegeben sei ein beliebiger Repräsentant von $\vec{v}$ mit dem Anfangspunkt A(x_a; y_a) und dem Endpunkt E(x_e; y_e). Zu A lässt sich ein Ursprungrepräsentant $\vec{a}$ und zu E ein Ursprungrepräsentant $\vec{e}$ zuordnen. Der Ursprungsrepräsentant von $\vec{v}$ bestimmt sich mit Hilfe von Bild 4 durch:

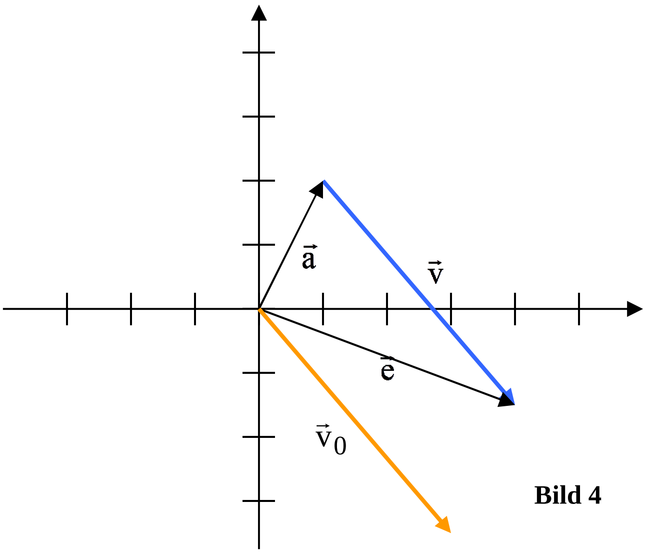


Bild 4

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix};$$

$$\vec{a} + \vec{v}_0 = \vec{e}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{e} - \vec{a}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_e - x_a \\ y_e - y_a \end{pmatrix}$$

Der Ursprungsrepräsentant zu einem beliebigen Repräsentanten ergibt sich durch die Regel:

Endpunktskomponenten minus Anfangspunktkomponenten

Definition:

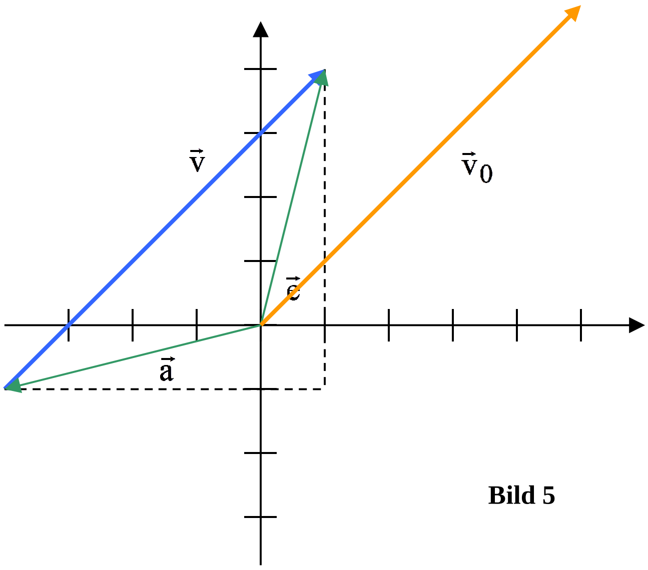
Gegeben seien die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sei gegeben

durch: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} = x_v \cdot x_w + y_v \cdot y_w$.

Beispiele:

a) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=6+12=18$ b) $\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}=10+(-10)+3=3$

Der Betrag (Länge) eines Repräsentanten $\vec{v}$ bestimmt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras (Bild 5), wobei wieder zunächst $\vec{v}_0$ zu bestimmen ist:



$$\vec{v}_0=\begin{pmatrix}x_e-x_a\\y_e-y_a\end{pmatrix}$$
$$|\vec{v}_0|=\sqrt{(x_e-x_a)^2+(y_e-y_a)^2}$$

Bild 5

Für beliebige Ursprungsrepräsentanten lässt sich der Betrag auch elegant mit Hilfe des Skalarproduktes darstellen:

$$\vec{w}=\begin{pmatrix}x_w\\y_w\end{pmatrix}$$
$$|\vec{w}|=\sqrt{x_w^2+y_w^2}=\sqrt{\underbrace{\begin{pmatrix}x_w\\y_w\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_w\\y_w\end{pmatrix}}_{\text{Skalarprodukt}}}=\sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w}}=\sqrt{\vec{w}^{\,2}}$$

Übungen:

Aufgabe 1:
Gegeben seien die Repräsentanten:

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{d}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$;

a) Zeichnen Sie die Repräsentanten in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie alle möglichen Summen und Differenzen dieser Repräsentanten.
b) Berechnen Sie alle Beträge der gegebenen Repräsentanten.
c) Berechnen Sie die Skalarprodukte, die von jeweils zwei verschiedenen der gegebenen Repräsentanten gebildet werden können.

Aufgabe 2:

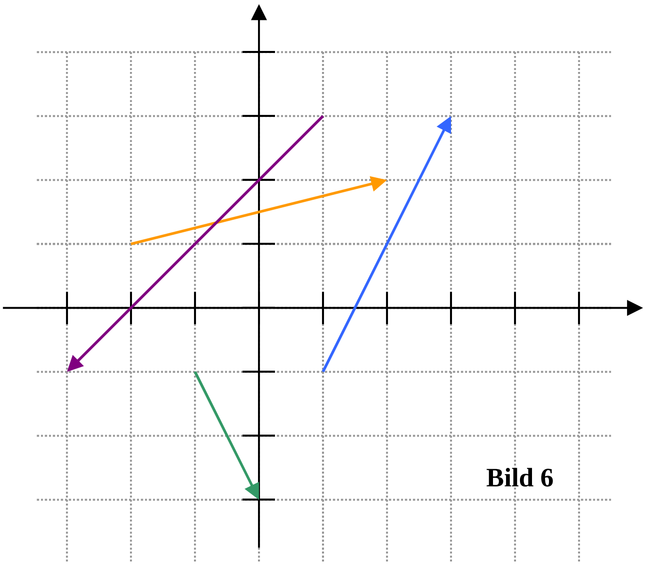


Bild 6

Bestimmen Sie die Komponentenschreibweise der in Bild 6 dargestellten Repräsentanten und bestimmen Sie ihre Länge.

Aufgabe 3:

Bilden Sie – wenn möglich – das Skalarprodukt und berechnen Sie die Länge der folgenden Repräsentanten.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};$$

Aufgabe 4:

Untersuchen Sie für die folgenden Repräsentanten, ob das Assoziativgesetz auch für das Skalarprodukt gültig ist.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix};$$

Bemerkung:
Es ist zu zeigen: $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$

§1. Vektorräume

§ 1.0 Vorüberlegung / Existenz:

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gleicher Komponentenanzahl gelten die Rechenregeln:

(I)	Kommutativgesetz	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
(II)	Assoziativgesetz (Addition)	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
(III)	Existenz der Null	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
(IV)	Existenz des additiven Inversen	$\vec{a}+\vec{n}=\vec{0}; \Rightarrow \vec{n}=-\vec{a}$
(V)	Skalare Multiplikation	$\lambda \cdot \vec{a}=(\lambda \cdot \vec{a})$
(VI)	Distributivgesetz	$\lambda \cdot (\vec{a}+\vec{b})=\lambda \cdot \vec{a}+\lambda \cdot \vec{b}$
(VII)	Assoziativgesetz (S-Multiplikation)	$\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})=(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$
(VIII)	Existenz der S-Eins	$1 \cdot \vec{a}=\vec{a}$

Definition:
Gegeben sei eine nichtleere Menge V von Vektoren mit gleicher Komponentenanzahl n.
Gilt für alle Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \in V$ und für beliebige reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \in R$:
$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1+\lambda_2 \cdot \vec{a}_2+\lambda_3 \cdot \vec{a}_3+\ldots =: \vec{a}_k \in V$, so heißt die Menge V abgeschlossen. Der Vektor $\vec{a}_k$ entsteht durch eine sog. Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \in V$. Gelten in einer – in diesem Sinne abgeschlossenen – Vektormenge V alle Rechenregeln von (I) – (VIII), so nennt man V Vektorraum.

Beispiele:

1) $V:=\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in R\right\}$ ist einVektorraum!

Beweisidee: Summen und Produkte von reeller Zahlen ergeben eine reelle Zahl!

2) $V:=\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in N\right\}$ ist kein Vektorraum!

Beweisidee: Summen und Produkte von reeller Zahlen mit natürlichen Zahlen ergeben nicht zwangsläufig eine natürliche Zahl!

3) $V:=\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, a_3 \in R\right\}$ ist ein Vektorraum!

Beweisidee: Summen und Produkte von reeller Zahlen ergeben eine reelle Zahl!

4) $V:=\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in R\right\}$ ist einVektorraum!

Beweisidee: Summen und Produkte von reeller Zahlen ergeben eine reelle Zahl!

5) $V:=\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a_1 \in R\right\}$ ist einVektorraum!

Beweisidee: Summen und Produkte von reeller Zahlen ergeben eine reelle Zahl!

§ 1.0.1 Einheitsvektoren

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor der Länge Eins. Besonders sind die sog. kanonischen Einheitsvektoren, die bis auf eine einzige Komponente – die mit der Eins besetzt ist – mur Nullen besitzen.

Im R^2 gilt: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

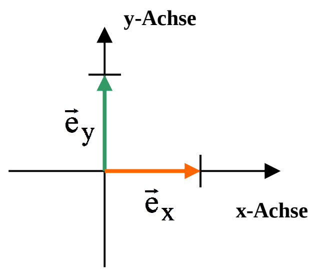
Im R^3 gilt: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Im R^n gilt: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die skalare Multiplikation führt in Verbindung mit einem Ursprungsrepräsentanten zu einer Ursprungsgeraden. Für die kanonischen Einheitsvektoren folgt:

$\lambda \cdot \vec{e}_x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine vektorielle Darstellung der x - Achse

$\mu \cdot \vec{e}_y = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine vektorielle Darstellung der y - Achse



Die kanonischen Einheitsvektoren lassen sich „Richtungsvektoren" der Koordinatenachsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems auffassen!

Jeder Punkt im Koordinatensystem kann aufgefasst werden als Endpunkt eines Ursprungsrepräsentanten. Offensichtlich kann jeder dieser Ursprungsrepräsentanten mit den kanonischen Einheitsvektoren – unter Verwendung der skalaren Multiplikation und der Vektoraddition – erzeugt werden:

Es gilt: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

Bemerkung:
Die Vektormenge V := $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \ldots, \vec{e}_k\}$ erzeugt in Verbindung mit der S-Multiplikation einen k-dimensionalen Vektorraum. Ist die Anzahl k der verschiedenen kanonischen Einheitsvektoren kleiner als die Anzahl n der Komponenten dieser Vektoren, so heißt V **Erzeugendensystem** des k-dimensionalen Unterraums des R^n. Ist k gleich m so heißt V **Basis** des R^n.

§ 1.1 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Definition:
Zwei Repräsentanten – künftig einfachheitshalber Vektoren – heißen linear abhängig (auch kolinear), wenn sie parallel zueinander liegen!

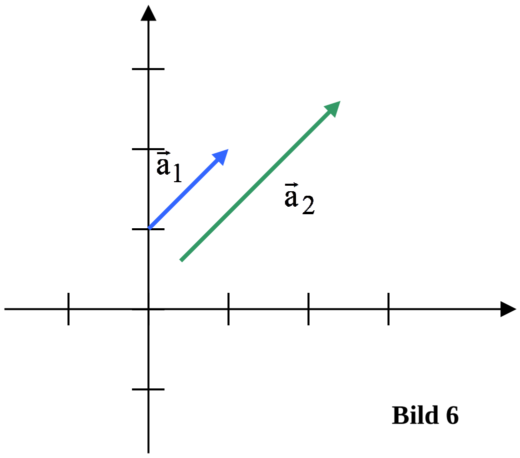


Bild 6

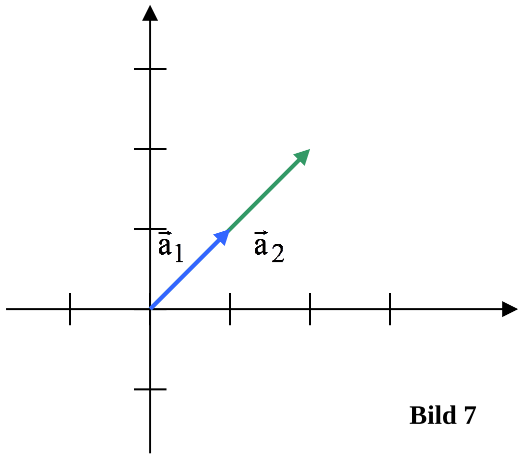


Bild 7

Überlegung:
Betrachtet man zwei parallele Repräsentanten (Bild 6), so erkennt man anhand ihrer Ursprungsrepräsentanten (Bild 7), dass es eine reelle Zahl (ungleich Null) gibt, so dass gilt:

$$\vec{a}_2 = \mu_1 \cdot \vec{a}_1 \Leftrightarrow \mu_1 \cdot \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{0} \ (*)$$

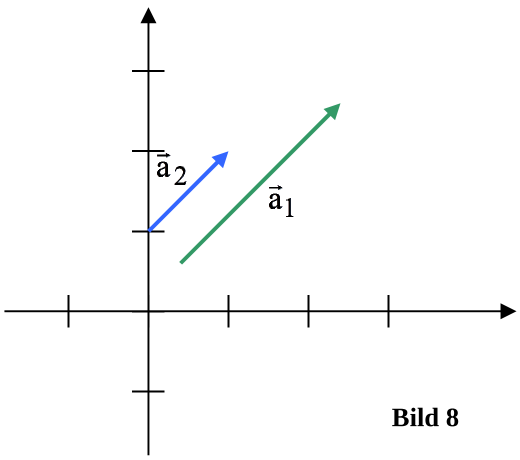


Bild 8

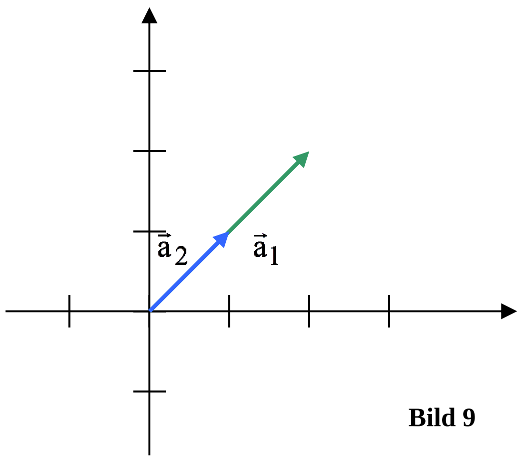


Bild 9

In der Situation von Bild 8 und Bild 9 gilt:

$$\vec{a}_1 = \varepsilon_2 \cdot \vec{a}_2 \Leftrightarrow \varepsilon_2 \cdot \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{0} \ (**)$$

Den allgemeinsten Fall (hier wird auch eine evtl. verschiedene Orientierung berücksichtigt) erhält man durch Addition von (*) und (**):

$$\mu_1 \cdot \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \varepsilon_2 \cdot \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \overbrace{(\mu_1 - 1)}^{=:\lambda_1} \cdot \vec{a}_1 + \overbrace{(\varepsilon_2 - 1)}^{=:\lambda_2} \cdot \vec{a}_2 = \vec{0}$$

Zwei Vektoren $\vec{a}_1 \neq \vec{0}, \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ heißen linear abhängig, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$ gibt, so dass gilt:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{0}$$

andernfalls heißen die Vektoren linear unabhängig!

Definition:
Drei paarweise nicht parallele Vektoren heißen linear abhängig (auch komplanar), wenn sie in einer Ebene liegen!

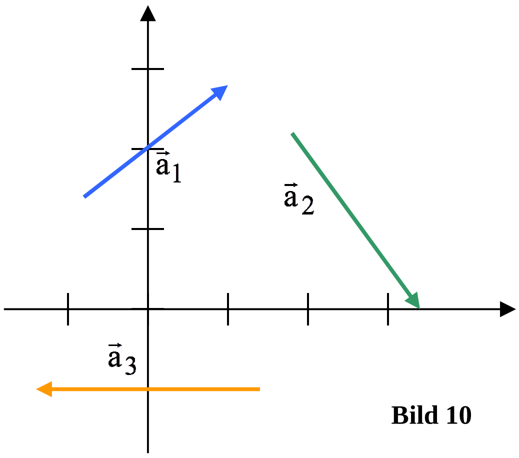


Bild 10

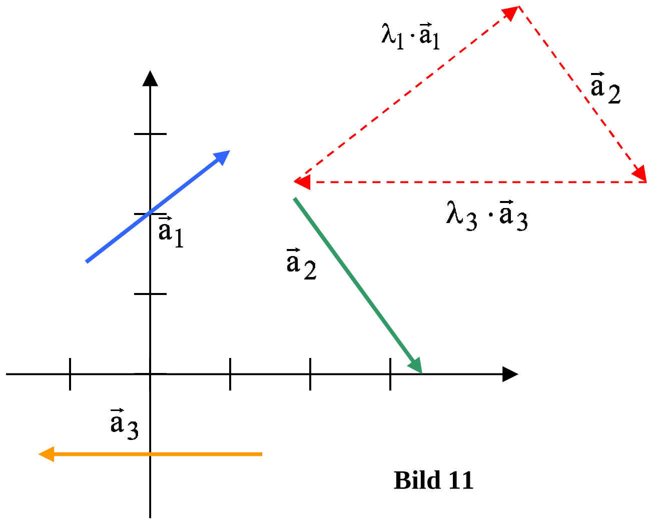


Bild 11

Überlegung:
Betrachtet man drei paarweise nicht parallele Vektoren in einer Ebene (Bild 10 und Bild 11), so erkennt man, dass sich reelle Zahlen finden lassen, so dass gilt:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Durch eine zum kolinearen Fall analoge Vorgehensweise erhält man die folgende Aussage:

Drei paarweise nicht parallele Vektoren $\vec{a}_1 \neq \vec{0}, \vec{a}_2 \neq \vec{0}, \vec{a}_3 \neq 0$ heißen linear abhängig, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$ gibt, so dass gilt:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}$$

andernfalls heißen die Vektoren linear unabhängig!

Folgerungen:

Zur Kolinearität:
Die Menge aller kolinearen Vektorrepräsentanten bildet einen Vektorraum zum sog. Basisvektor $\vec{a}_1$ und lässt sich durch die Gleichung $\vec{a}_2 = \lambda \cdot \vec{a}_1$ mit $\lambda \in$ R beschreiben. Für λ = 0 liegt auch der Ursprung des Koordinatensystems in der Punktmenge. Die Endpunkte von $\vec{a}_2$ liegen also auf einer Ursprungsgerade. Eine Gerade besitzt ist ein eindimensionales Objekt. Deswegen nennt man die Repräsentantenmenge $V = \{\vec{a}_2 \mid \vec{a}_2 = \lambda \cdot \vec{a}_1, \lambda \in R\}$ auch eindimensionalen Punktraum.

Zur Komplanarität:
Die Menge aller komplanaren Vektorrepräsentanten $\vec{a}_3 = \lambda \cdot \vec{a}_2 + \mu \cdot \vec{a}_1$ bildet einen linearen Vektorraum zu den Basisvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$. Für λ, μ = 0 liegt auch der Ursprung des Koordinatensystems in der Punktmenge. Die Endpunkte von $\vec{a}_3$ liegen also in einer Ursprungsebene der Dimension 2. Deswegen nennt man die Repräsentantenmenge auch zweidimensionalen Punktraum.

§ 1.2 Lineare Unabhängigkeit beliebiger Vektoren

Vorbemerkung:
Die Anzahl der Komponenten eines Vektors stimmt mit der Dimension des Vektorraumes überein, aus dem er stammt.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \in V := R^2 \qquad \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \in V := R^3 \qquad \begin{pmatrix}0{,}5\\-1\\0\\5\end{pmatrix} \in V := R^4 \qquad \vec{a} := \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \in V := R^n$$

Definition:

Gegeben sei eine Vektormenge $U \subset R^n$ durch $U := \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_m\}$. Die Vektoren aus U heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 + \ldots + \lambda_m \cdot \vec{a}_m = \vec{0}$$

nur dann gilt, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_m = 0$ ist!
Andernfalls heißen die Vektoren aus U linear abhängig.

Bemerkung 1:
Gegeben sei eine Vektormenge U von m (m < n) Vektoren des n-dimensionalen Vektorraums R^n. Die maximale Anzahl k ($k \leq m < n$) der linear unabhängigen Vektoren aus U bilden ein sog. Erzeugendensystem eines k-dimensionalen Untervektorraums des R^n.

Bemerkung 2:
Gegeben sei eine Vektormenge U von n Vektoren des n-dimensionalen Vektorraums R^n. Die maximale Anzahl k der linear unabhängigen Vektoren aus U bilden ein sog. Erzeugendensystem eines k-dimensionalen Untervektorraums des R^n (k < n). Ist k = n, dann bildet U ein Erzeugendensystem des gesamten R^n. In diesem Fall nennt man U Basis des R^n.

Bemerkung 3:
Gegeben sei eine Vektormenge U von m (m > n) Vektoren des n-dimensionalen Vektorraums R^n. Dann ist wenigstens ein Vektor aus U als Linearkombination der restlichen Vektoren darstellbar (d.h.: Die Vektoren aus U können nicht linear unabhängig sein!!!).

§ 1.3 Lineare Gleichungssysteme

Einfache Gleichungssysteme sind bereits aus der Mittelstufe bekannt. Die allgemeinste Form eines linearen Gleichungssystems ist gegeben durch:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}\cdot x_{11} & +a_{21}\cdot x_{21} & +a_{31}\cdot x_{31} & +\ldots & +a_{n1}\cdot x_{n1} & = & b_1 \\
a_{12}\cdot x_{12} & +a_{22}\cdot x_{22} & +a_{32}\cdot x_{32} & +\ldots & +a_{n2}\cdot x_{n2} & = & b_2 \\
a_{13}\cdot x_{13} & +a_{23}\cdot x_{23} & +a_{33}\cdot x_{33} & +\ldots & ++a_{n3}\cdot x_{n3} & = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & = & \vdots \\
a_{1m}\cdot x_{1m} & +a_{2m}\cdot x_{2m} & +\ldots & +\ldots & ++a_{nm}\cdot x_{nm} & = & b_m
\end{array}$$

Beispiele:

a)
$$\begin{array}{cccc}
2\cdot x & +3\cdot y & = & 1 \\
x & -y & = & -3
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc}
2\cdot x & +y & -2\cdot z & = & 1 \\
x & -y & -z & = & -1 \\
x & -3\cdot y & +2\cdot z & = & 0
\end{array}$$

Geometrisch bedeutete das Lösen eines Gleichungssystems das Auffinden eines Schnittpunktes von Geraden. War das System nicht lösbar, so existierte kein Schnittpunkt!

Auch zur Überprüfung der linearen Unabhängigkeit von Vektoren lässt sich das Lösen von linearen Gleichungssystemen verwenden!

Beispiel 1:

Sind die Vektoren der Vektormenge $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ linear unabhängig?

Aus der Definition der linearen Unabhängigkeit folgt nach einigen Umformungen:

$$\lambda_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\lambda_3\cdot\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=-\lambda_3\cdot\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}_{\mu_1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_3}}_{\mu_2}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\mu_2\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3\cdot\mu_2 \\ \mu_2 \\ 2\cdot\mu_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1+3\cdot\mu_2 \\ 0\ +\ \mu_2 \\ \mu_1+2\cdot\mu_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie in zusammengehörenden Komponenten übereinstimmen!

Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 + 3\cdot\mu_2 \\ 0 + \mu_2 \\ \mu_1 + 2\cdot\mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu_1 + 3\cdot\mu_2 = -2{,}5 \\ 0 + \mu_2 = -0{,}5 \\ \mu_1 + 2\cdot\mu_2 = -2 \end{array}$$

Beispiel 2:

Ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig von den Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Auch hier folgt mit Hilfe der Definition der Unabhängigkeit:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2\cdot\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 = 0 \end{array}$$

§ 1.4 Verfahren zur Berechnung der Lösung von linearen Gleichungssystemen

§ 1.4.1 Einsetzungsverfahren

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen. Man löst eine günstige Gleichung nach einer Variablen auf und setzt diese Teillösung in alle anderen Gleichungen ein. Dadurch reduziert sich das ursprüngliche Gleichungssystem auf ein neues System mit n-1 Variablen. Nach diesem Schema verfährt man solange mit den entstehenden Gleichungssystemen, bis man eine Variable konkret bestimmen kann. Durch sukzessives Einsetzen in die jeweiligen Teilsysteme des vorhergehenden Schrittes aller Teillösungen für die Variablen lässt sich so die Gesamtlösung bestimmen (falls es überhaupt eine Lösung gibt!)!

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2\cdot x & +2\cdot y & -z & = & 4 \\ x & -y & +2\cdot z & = & 5 \\ x & & -z & = & 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[x=z]{} \left.\begin{array}{rrcr} z & +2\cdot y & = & 4 \\ 3\cdot z & -y & = & 5 \end{array}\right\} \xrightarrow[y=3\cdot z-5]{}$$

$$7\cdot z - 10 = 4 \qquad \Leftrightarrow z = 2 \Rightarrow y = 1 \wedge x = 2$$

§ 1.4.2 Additionsverfahren

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen und k Zeilen. Man wählt eine Variable aus und bildet das kleinste gemeinsame Vielfache der Beiwerte der Variablen. Danach erweitert man die Gleichungen des Systems so, dass der Beiwert der ausgewählten Variablen das berechnete kgV ist! Danach subtrahiert man eine Gleichung von allen anderen Gleichungen und erhält ein Gleichungssystem, das in k-1 Zeilen aus n-1 Variablen besteht. Dieses Schema wende man so lange an bis der Wert einer Variablen berechnet ist. Durch sukzessives Einsetzen in die jeweiligen Teilsysteme des vorigen Schrittes aller Teillösungen für die Variablen lässt sich so die Gesamtlösung bestimmen (falls eine Lösung existiert!)!

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 2\cdot x & +2\cdot y & -z & = & 4 \\ x & -y & +2\cdot z & = & 5 \\ x & & -z & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrrr} 2\cdot x & +2\cdot y & -z & = & 4 \\ -2\cdot x & +2\cdot y & -4\cdot z & = & -10 \\ -2\cdot x & & +2\cdot z & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 2\cdot x & +2\cdot y & -z & = & 4 \\ & +4\cdot y & -5\cdot z & = & -6 \\ & 2\cdot y & +z & = & 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrrr} 10\cdot x & +10\cdot y & -5\cdot z & = & 20 \\ & +4\cdot y & -5\cdot z & = & -6 \\ & 10\cdot y & +5\cdot z & = & 20 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 10\cdot x & +20\cdot y & & = & 40 \\ & +14\cdot y & & = & 14 \\ & 10\cdot y & +5\cdot z & = & 20 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrrr} x & +2\cdot y & & = & 4 \\ & -2\cdot y & & = & -2 \\ & 2\cdot y & +z & = & 4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}$$

Bemerkung: Da in diesem Verfahren einzelne Variablen eliminiert werden nennt man es auch nach seinem Entdecker Gauß`sches Eliminationssverfahren. Ein besonders elegante Anwendung dieses Verfahrens bildet die sog. Matrizenrechnung, bei der die Variablen zwecks Übersichtlichkeit bei der Rechnung weggelassen werden!

§ 2 Streckenteilungen

§ 2.0 Vorbemerkung:

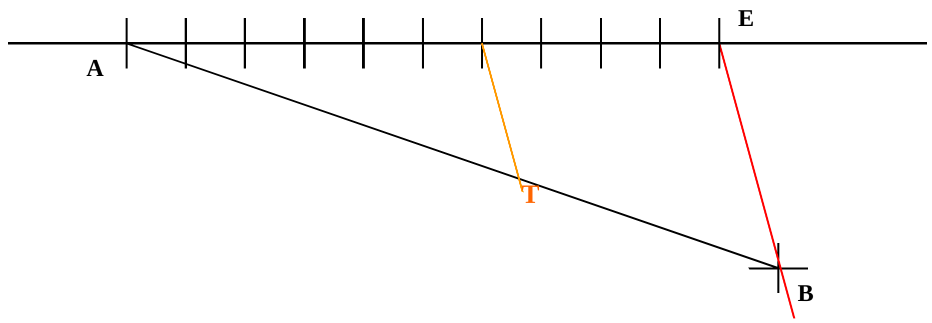
Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ sowie ein Punkt $P \in \left]A, B\right[$. Das Teilverhältnis τ der Strecke $\overline{AB}$ durch P besteht aus dem Quotienten der Teilstrecken $\overline{AP}$ und $\overline{PB}$. Das heißt:

$$\tau = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

Die Konstruktion einer Streckenteilung bei gegebenem τ erfolgt mit Hilfe einer zentrischen Streckung:

Beispiel 1:

Geg.: [AB];
Ges.: Teilung von a im Verhältnis $\overline{AT}/\overline{TB} = 6/4$;
Lsng. :
1. Schritt: Trage in A eine Hilfsgerade g an.
2. Schritt: Trage von A aus (6 + 4) = 10 beliebige aber gleich lange Strecken an. Es gilt: Der Anfangspunkt einer Strecke ist zugleich der Endpunkt der Vorgängerstrecke.
3. Schritt: Verbinde die letzte Markierung E auf g mit dem Punkt B.
4. Schritt: Die Parallele der zu [AT] gehörenden Markierung auf g zu EB teilt [AB] im geg. Verhältnis.



Bemerkung:

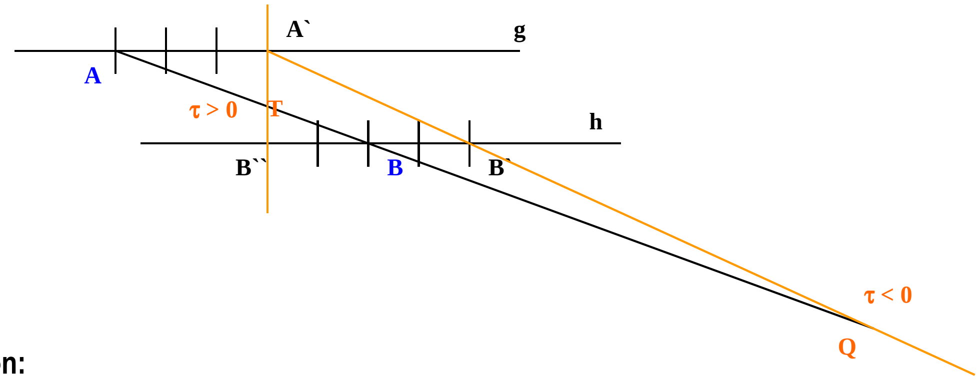
T ist das Zentrum einer zentrischen Streckung, die A auf B abbildet. Der Streckungsfaktor besitzt dabei den Wert $-4/6 = -2/3$, weil sich das Zentrum zwischen A und B befindet! T heißt deshalb auch innerer Teilpunkt. Zusätzlich gibt es jedoch auch außerhalb der Strecke einen Punkt Q, der [AB] im vorgegebenen Verhältnis teilt! Q ist auch hier das Zentrum einer zentrischen Streckung, die A auf B abbildet. Der Streckungsfaktor besitzt dabei den Wert $+2/3$, weil sich das Zentrum nicht zwischen A und B befindet! Q heißt deshalb auch äußerer Teilpunkt.

Beispiel 2:

Geg.: [AB];
Ges.: T und Q bei einer Teilung von [AB] im Verhältnis $\overline{AT}/\overline{TB} = \left|t/s\right| = \left|3/2\right| =: \tau$;

Lsng.:

1. Schritt: Trage in A eine Hilfsgerade g und in B eine Hilfsgerade h an. Es gelte: g || h.
2. Schritt: Trage von A aus die Strecke t (in einer Richtung von g) an; wir erhalten den Hilfspunkt A\`.
   Trage von B aus die Strecke s (in beide Richtungen von h) an; wir erhalten die Hilfspunkte B\` (gleiche Richtung wie [AA\`]) und B\`\` (entgegengesetzte Richtung wie [AA\`]).
3. Schritt: Die Verbindung von A\`B\` schneidet AB im äußeren Teilpunkt Q.
4. Schritt: Die Verbindung von A\`B\`\` schneidet AB im inneren Teilpunkt T.



Definition:

Ein Punkt T teilt [AB] im Verhältnis τ, wenn $\overrightarrow{AT} = \tau \cdot \overrightarrow{TB}$ gilt. T ist innerer Teilpunkt, wenn $\tau > 0$; T ist äußerer Teilpunkt, wenn $\tau < 0$.

§ 2.1 Streckenteilungen in der analytischen Geometrie

§ 2.1.1 Der Mittelpunkt einer Strecke

Gegeben seien die Endpunkte A und B einer Strecke $\overline{AB}$ mit den Ursprungsrepräsentanten $\vec{a}$ und $\vec{b}$. ObdA sei B der Endpunkt von $\overline{AB}$. Der zu $\overline{AB}$ gehörende Ursprungsrepräsentant berechnet sich dann durch $\vec{b} - \vec{a}$. Der Ursprungsrepräsentant $\vec{m}$ des Streckenmittelpunkts M ist dann gegeben durch (siehe Bild 12):

$$\text{(I)} \quad \vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$\text{(II)} \quad \vec{m} = \vec{b} - \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

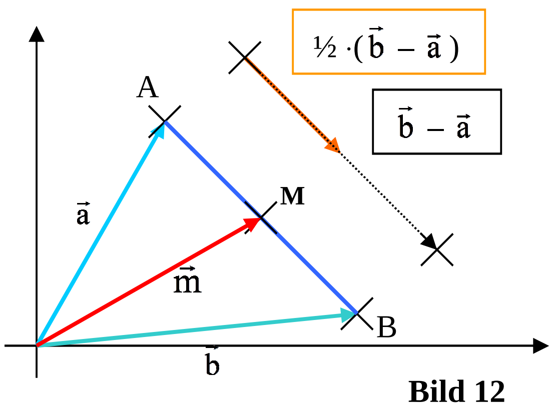


Bild 12

§ 2.1.2 Ein beliebiger Teilpunkt T einer Strecke

Gegeben seien die Endpunkte A und B einer Strecke $\overline{AB}$ mit den Ursprungsrepräsentanten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie ein weiterer Punkt $T \in \left]A,B\right[$. ObdA sei B der Endpunkt von $\overline{AB}$. Der zu $\overline{AB}$ gehörende Ursprungsrepräsentant berechnet sich dann durch $\vec{b} - \vec{a}$. Der zu $\overline{AT}$ gehörende Ursprungsrepräsentant berechnet sich dann durch $\vec{t} - \vec{a}$. Der zu $\overline{TB}$ gehörende Ursprungsrepräsentant berechnet sich dann durch $\vec{b} - \vec{t}$:

Es gilt allgemein:

$$\begin{gathered}\overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB} \\ \vec{b} - \vec{a} = (\vec{t} - \vec{a}) + (\vec{b} - \vec{t}) \\ \text{sowie:} \\ \overline{AT} = \lambda \cdot \overline{TB} \\ (\vec{t} - \vec{a}) = \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{t})\end{gathered}$$

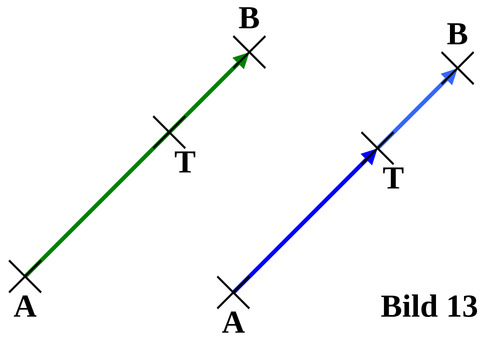


Bild 13

Ist A, B und T gegeben, so lässt sich der Streckungsfaktor λ berechnen durch:

$$(\vec{t} - \vec{a}) = \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{t}) \Rightarrow \lambda = \frac{(\vec{t} - \vec{a})}{(\vec{b} - \vec{t})}$$

Der Ursprungsrepräsentant $\vec{t}$ berechnet sich bei gegebenen $\lambda \neq -1$ durch:

$$(\vec{t} - \vec{a}) = \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{t}) \Leftrightarrow \vec{t} - \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} - \lambda \cdot \vec{t} \Leftrightarrow \vec{t} + \lambda \cdot \vec{t} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{t} = \frac{\vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}}{1 + \lambda}$$

Bemerkung:

Ist $\lambda > 0$, so ist T der innere Teilpunkt T_i von $\overline{AB}$. Ist $\lambda < 0$, so ist T der äußere Teilpunkt T_a von $\overline{AB}$.

Liegen zwei Teilpunkte T_i und T_a so, dass $\frac{\overline{AT_i}}{\overline{T_iB}} = \frac{\overline{AT_a}}{\overline{T_aB}}$ gilt, dann sagt man die Strecke $\overline{AB}$ wird durch die Punkte T_i und T_a harmonisch geteilt.

§ 2.2 Der Schwerpunkt eines Dreiecks

Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ist durch den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden gegeben. Dabei gilt: Der Schwerpunkt S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 (siehe Bild 14). Es gilt:

$$\begin{aligned}\overline{BS} &= 2 \cdot \overline{SM_b} \\ \overline{AS} &= 2 \cdot \overline{SM_a} \\ \overline{CS} &= 2 \cdot \overline{SM_c}\end{aligned}$$

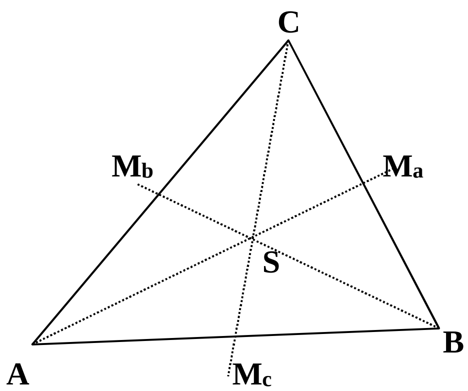


Bild 14

Unter Verwendung des Teilungsverhältnisses findet man für den Ortsvektor $\vec{s}$ des Schwerpunktes (siehe Bild 15):

$$\left.\begin{array}{l}\vec{s}=\vec{b}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BM_b}\\ \overrightarrow{BM_b}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\vec{s}=\vec{b}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}\right)\Leftrightarrow$$

$$\vec{s}=\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot(\vec{a}+\vec{c})-\frac{2}{3}\cdot\vec{b}\Leftrightarrow$$

$$\vec{s}=\frac{1}{3}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

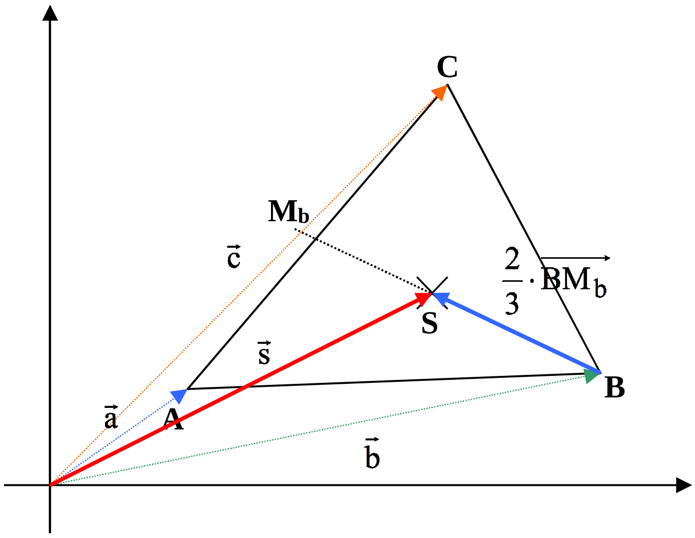


Bild 15

Aufgaben:

1. Gesucht ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ mit A (7; 2) und B (4; -3). Bestimmen Sie die Komponentenschreibweise der Ursprungsrepräsentanten von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AM}$.
2. Von der Strecke $\overline{AB}$ kennt man $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ und M (3; 1). Gesucht sind B und $\vec{b}$.
3. Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ durch A(-5;-2) und B (7;1) sowie die Punkte T_i (5; 0,5) und T_a (-17;-5). Bestimmen Sie die Teilverhältnisse!
4. Auf der Strecke $\overline{AB}$ mit A(1; 3) und B (4; 12) liegt der Punkt T_i (2;6). Welche Komponenten besitzt der Ursprungsrepräsentant des äußeren Teilpunktes T_a, wenn $\overline{AB}$ durch T_i und T_a harmonisch geteilt werden soll?
5. Die Punkte A (1;-2), B (5; 1) und C (3; 6) bilden ein Dreieck ABC. Bestimmen sie den Schwerpunkt des Dreiecks.
6. Die Punkte A (1;-2), B (5; 1) und C (3; 4) bilden ein Dreieck ABC. Bestimmen sie den Schwerpunkt des Dreiecks. Wo muss ein weiterer Punkt P liegen, dass aus dem Dreieck ein Parallelogramm wird (drei Lösungen!)?
7. Ein Tetraeder ist durch seine Ecken A $(\vec{a})$, B $(\vec{b})$, C $(\vec{c})$ und D $(\vec{d})$ gegeben. Sein Schwerpunkt sei S.
   a) **Beweisen Sie:** Die Schwerlinien teilen einander im Verhältnis 3:1.
   b) **Beweisen Sie:** Der Ursprungsrepräsentant $\vec{s}$ des Schwerpunktes S genügt der Gleichung:

$$\vec{s}=\frac{1}{4}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$$

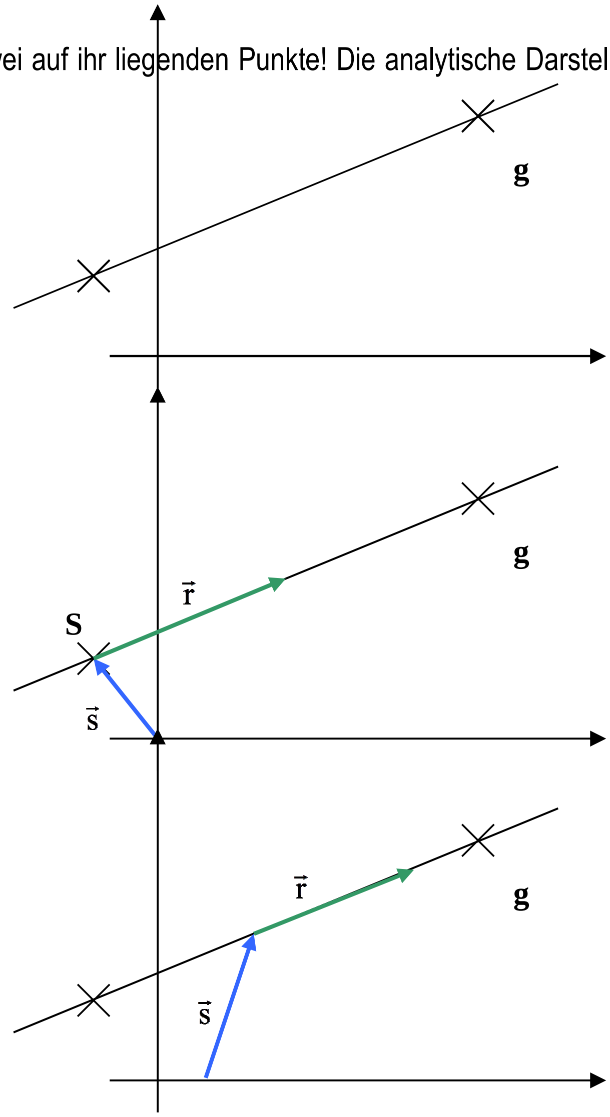
§ 3 Geraden

§ 3.0 Vorbemerkung

Eine Gerade g ist eindeutig bestimmt durch zwei auf ihr liegenden Punkte! Die analytische Darstellung einer Geradengleichung lautet:

$$y = m \cdot x + t$$

wobei m für die Steigung (Richtung) der Geraden und t für den y-Achsenabschnitt steht.



§ 3.1 Parameterform der Geradengleichung

In rechtwinkligen Koordinatensystemen ist die Lage einer Geraden bezüglich des Ursprungs festgelegt durch einen Punkt S mit dem zugehörigen Ursprungsrepräsentanten $\vec{s}$ und einem Richtungsvektor $\vec{r}$.

Für die Ursprungsrepräsentanten X aller Geradenpunkte gilt dann die Vektorgleichung ($\lambda \in$ R):

$$X = \vec{s} + \lambda \cdot \vec{r}$$

Bemerkung:

Im Gegensatz zur Analysis ist die vektorielle Darstellung einer Geraden nicht eindeutig. Es gibt unendlich viele verschiedene Möglichkeiten eine Gerade mit Vektoren darzustellen!

§ 3.2 Lagebeziehungen zwischen Geraden

Vorbemerkung:
Ein Punkt P liegt auf einer Geraden g, wenn das Einsetzen seiner Koordinaten in die Geradengleichung zu einer wahren Aussage führt.

Beispiel:
Gegeben sei die Gerade g: $y = 3 \cdot x + 7$ sowie die Punkte P (-2; 1) und Q (1; 7). P liegt offensichtlich auf g, denn $1 = 3 \cdot (-2) + 7$ während Q kein Element von g ist.

§ 3.2.1 Identische Geraden

In der Vektorgeometrie ist es meist nicht offensichtlich, wann zwei Geradengleichungen denselben Graphen repräsentieren. Ist dies der Fall, so müssen

a) die Richtungsvektoren der beiden Geraden (bis auf einen konstanten Faktor) übereinstimmen und
b) die Geraden wenigstens einen gemeinsamen Punkt aufweisen (denn dann stimmen sie in allen Punkten überein).

Beispiel 1:

$$\left.\begin{aligned} g_1: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ g_2: \vec{X} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ mit } \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \mu \cdot 5/2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ folgt: } \lambda = (-5/2) \cdot \mu$$

d.h.: die Richtungsvektoren stimmen (bis auf eine Konstante) überein!

Zur Überprüfung der Idenzität genügt es nachzuweisen, dass der zum Ursprungsrepräsentanten des Stützvektors einer Geraden gehörende Punkt auch auf der anderen Geraden liegt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 1 + 2 \cdot \lambda = -1 & & \lambda = -1 \\ 3 - \lambda = 4 & \Rightarrow & \lambda = -1 \\ -1 - \lambda = 0 & & \lambda = -1 \end{array}$$

In allen Einzelgleichungen erhält man für λ denselben Wert, d.h. die Graphen der Geraden sind identisch!

Beispiel 2:

$$\left.\begin{aligned} g_1: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ g_2: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ mit } \lambda = 2 \cdot \mu \Rightarrow \text{ Gleichheit der Richtungsvektoren!}$$

Mit $\lambda = 1$ folgt: S (1;3) liegt auf g_1, d.h. die Graphen der Geraden sind identisch!

§ 3.2.2 Parallele Geraden

Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn

a) die Richtungsvektoren der beiden Geraden (bis auf einen konstanten Faktor) übereinstimmen und
b) die Geraden keinen gemeinsamen Punkt aufweisen.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ g_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ mit } \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \mu \cdot 5/2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ folgt: } \lambda = (-5/2) \cdot \mu$$

d.h.: die Richtungsvektoren stimmen (bis auf eine Konstante) überein!

Zur Überprüfung der Idenzität genügt es nachzuweisen, dass der zum Ursprungsrepräsentanten des Stützvektors einer Geraden gehörende Punkt auch auf der anderen Geraden liegt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 1 + 2 \cdot \lambda = -2 \\ 3 - \lambda = 3 \\ -1 - \lambda = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -3/2 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{array}$$

In den Einzelgleichungen erhält man für λ verschiedene Werte, d.h. der Punkt S (-2; 3; 0) liegt nicht auf der Geraden g_1. Damit erhält man die Parallelität von g_1 und g_2.

§ 3.2.3 Geraden mit unterschiedlichen Richtungsvektoren

Bei Geraden mit unterschiedlichen Richtungsvektoren ist der Schnittpunkt zu finden. Dazu werden die Geradengleichungen analog zur Analysis gleichgesetzt und das resultierende Gleichungssystem gelöst. Dadurch werden die Werte der Parameter für den Schnittpunkt bestimmt. Durch Einsetzen in die entsprechende Geradengleichung erhält man zunächst den Ursprungsrepräsentanten dieses Schnittpunktes und damit seine Koordinaten.

Beispiel 1:

$$\left.\begin{aligned} g_1: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ g_2: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{g_1 \cap g_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3\cdot\lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu \ = 3 \end{matrix} \to \begin{matrix} 3\cdot\lambda + \mu = \ 1 \\ \lambda \quad = 3 + \mu \end{matrix} \to \begin{matrix} 9 + 4\cdot\mu = \ 1 \\ \lambda \quad = 3 + \mu \end{matrix} \to \begin{matrix} \mu = -2 \\ \lambda = \ 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ aus } g_1 \text{ bzw. } \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ aus } g_2 \Rightarrow S(4;-1)$$

Beispiel 2:

$$\left.\begin{aligned} g_1: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ g_2: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{g_1 \cap g_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2\cdot\lambda - 2\cdot\mu = \ 0 \\ -\lambda - \mu \ = -2 \\ -\lambda \ = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2\cdot\lambda - 2\cdot\mu = 0 \\ \mu \ = 1 \\ \lambda \ = 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 2\cdot\lambda - 2\cdot\mu = 0 \ \text{ wahre Aussage} \\ \mu \ = \ 1 \\ \lambda \ = \ 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ aus } g_1 \text{ und } \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ aus } g_2 \Rightarrow S(3;2;-2)$$

Beispiel 3:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ g_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \xrightarrow{g_1 \cap g_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llllll} & 2\cdot\lambda - 2\cdot\mu = 0 & & 2\cdot\lambda - 2\cdot\mu = 0 & & -4=0 \quad \text{falsche Aussage} \\ \Rightarrow & -\lambda - \mu = -2 & \Rightarrow & \mu = 3 & \rightarrow & \mu = 3 \\ & -\lambda = 1 & & \lambda = -1 & & \lambda = -1 \end{array}$$

In diesem Fall schneiden sich die Geraden nicht!

Definition / Bemerkung:
Im zweidimensionalen schneiden sich nicht parallele Geraden immer! Im drei- oder mehrdimensionalen Räumen gilt diese Aussage nicht! Nichtparallele Geraden, die sich nicht schneiden nennt man windschief!

§ 3.2.4 Koordinatengleichungen von Geraden im R²

Die vektorielle Darstellung einer Geraden des R² lässt sich in die analytische Form einer impliziten Geradendarstellung a⋅y + b⋅x + c = 0 umrechnen; die dabei entstehende Gleichungsform nennt man auch Normalenform der Geradengleichung (die Bezeichnung rührt daher, dass zum Aufstellen der zum Richtungsvektor senkrecht oder „normal“ verlaufende Vektor verwendet wird!) . Dazu muss der Parameter λ eliminiert werden!

Herleitung:

$$g : \vec{X} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} \xrightarrow{GLS} \begin{array}{l} x_s + \lambda \cdot x_r = x \\ y_s + \lambda \cdot y_r = y \end{array} \xrightarrow{\lambda = \ldots} \lambda = \frac{y - y_s}{y_r}$$

$$\xrightarrow{\text{einsetzen}} x = x_s + \frac{y - y_s}{y_r} \cdot x_r \Leftrightarrow y \cdot \underbrace{x_r}_{a} - x \cdot \underbrace{y_r}_{b} + \underbrace{x_s \cdot y_r - y_s \cdot x_r}_{c} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{alternativ}} y = y_s + \frac{x - x_s}{x_r} \cdot y_r \Leftrightarrow y \cdot \underbrace{x_r}_{a} - x \cdot \underbrace{y_r}_{b} + \underbrace{x_s \cdot y_r - y_s \cdot x_r}_{c} = 0$$

Bespiel 1:

$$g: \vec{X} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{implizit}} 3 \cdot y + x - 7 = 0 \qquad \xrightarrow{\text{explizit}} y = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{7}{3}$$

Beispiel 2:

$$g: \vec{X} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{implizit}} 2 \cdot y - 5 \cdot x + 2 = 0 \qquad \xrightarrow{\text{explizit}} y = \frac{5}{2} \cdot x - 1$$

Bemerkung:
Implizite Normalenformen einer Geraden stimmen bis auf einen konstanten Faktor miteinander überein.
Explizite Normalenformen einer Geraden sind identisch!

Problem:
Lasse sich auch Geraden des R^3 in eine „Normalenform“ umrechnen?

Lösungsversuch:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GLS}} \begin{matrix} x_s + \mu \cdot x_r = & x \\ y_s + \mu \cdot y_r = & y \\ z_s + \mu \cdot z_r = & z \end{matrix} \xrightarrow{\mu = \ldots} \mu = \frac{z - z_s}{z_r}$$

Folgerung:
Die Umrechnung ist nicht möglich, da es nicht gelingt einen Zusammenhang zwischen allen Variablen herzustellen!

§ 4 Ebenen

§ 4.0 Vorbemerkungen

Die folgenden Aussagen sind äquivalent (selber überlegen!). Eine Ebene wird festgelegt durch

a) drei – nicht auf einer Geraden liegenden – Punkte (**Bild 16**).
b) zwei – sich schneidende – Geraden (Bild 17).
c) zwei echt parallele Geraden (Bild 17).

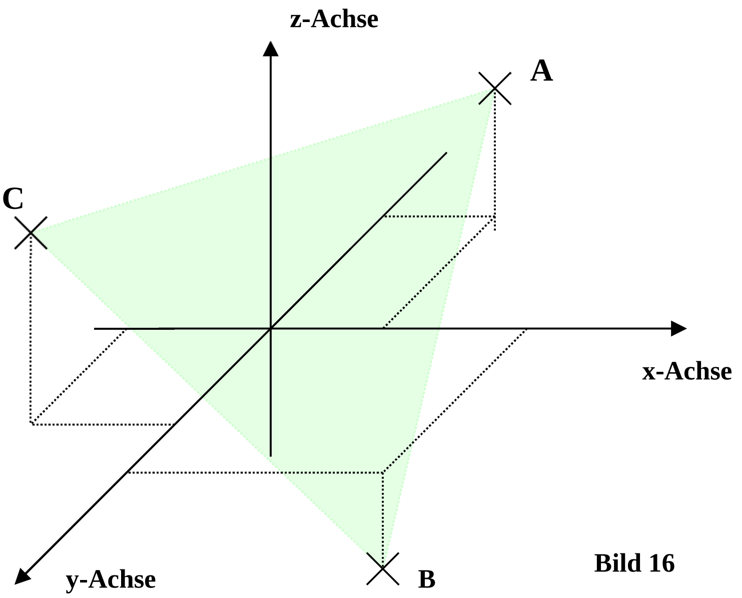


Bild 16

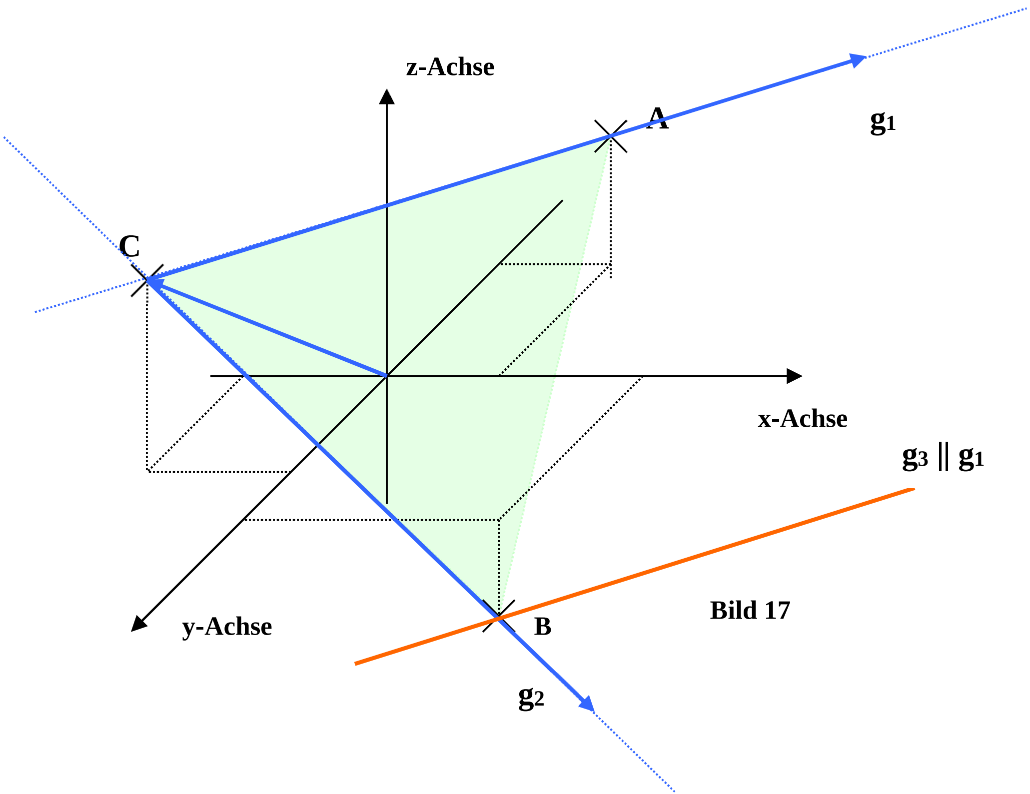


Bild 17

§ 4.1 Parameterform der Ebenengleichung

In rechtwinkligen Koordinatensystemen ist die Lage einer Ebene eindeutig durch einen in ihr enthaltenen Punkt und zwei verschiedene Richtungen festgelegt. Durch die Angabe dreier Punkte S, P und Q lässt sich – analog zur Vorgehensweise bei Geraden – eine Parameterdarstellung einer Ebene gewinnen. Dazu wählt man einen Stützpunkt S mit dem zugeordneten Stützpunktsrepräsentanten $\vec{s}$ und berechnet mit Hilfe der Vektordifferenzen $\vec{p}-\vec{s}$ und $\vec{q}-\vec{s}$ die benötigten Richtungsvektoren. Durch die Addition der so gebildeten Repräsentanten erhält man – bei Einführung geeigneter Parameter für die Richtungsvektoren – eine (wiederum nicht eindeutige) vektorielle Darstellung der Menge aller Ebenenpunkte:

$$E: \vec{X} = \vec{s} + \lambda \cdot \vec{r}_1 + \mu \cdot \vec{r}_2 \qquad \text{bzw.:} \quad E: \vec{X} = \vec{s} + \lambda \cdot (\vec{p}-\vec{s}) + \mu \cdot (\vec{q}-\vec{s})$$

Beispiel:

Gegeben seien die Punkte S (1; 2; -3), P (2; -1; 0) und Q (-1; 2; 1). Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Parameterform.

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder:} \quad E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

§ 4.1.1 Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden

Geraden können parallel zu einer Ebene E verlaufen, d.h.: sie sind in einer Ebene F enthalten, die zu E parallel liegt, oder aber komplett in einer Ebene enthalten sein, bzw. eine Ebene in einem Punkt schneiden! Aufgrund der unendlich vielen verschiedenen Möglichkeiten, wie eine Ebenengleichung aufgestellt werden kann, sind diese Fälle in der Regel nicht mit Hilfe der Richtungsvektoren der Geraden und der Ebene zu unterscheiden. Hier muss meist ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Existiert ein Schnittpunkt zwischen einer Ebene E und einer Geraden g, so nennt man diesen Punkt auch Durchstoßpunkt von g auf E.

Beispiel 1:

Geg.: $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E \cap g: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \delta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}-\delta\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{lrcr}\text{(I)} & \lambda-2\cdot\mu-2\cdot\delta & = & -1\\ \text{(II)} & -3\cdot\lambda-\delta & = & -1\\ \text{(III)} & 3\cdot\lambda+4\cdot\mu+\delta & = & 2\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{(II)}}\delta=1-3\cdot\lambda\Rightarrow\begin{array}{rcl}7\cdot\lambda-2\cdot\mu & = & 1\\ 4\cdot\mu & = & 1\end{array}\xrightarrow{\mu=1/4}\lambda=\frac{3}{14}\Rightarrow\delta=\frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow D:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{14}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/7\\19/14\\-9/14\end{pmatrix}\Rightarrow D\left(5/7\quad 19/14\quad -9/14\right)$$

Beispiel 2:

Geg.: $E:\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix};\quad g:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}+\delta\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-6\end{pmatrix}$

$$E\cap g:\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}+\delta\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-6\end{pmatrix}\Leftrightarrow\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}-\delta\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\7\end{pmatrix}$$

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}-\delta\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\7\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{lrcr}\text{(I)} & \lambda-2\cdot\mu+2\cdot\delta & = & -1\\ \text{(II)} & -3\cdot\lambda-6\cdot\delta & = & -3\\ \text{(III)} & 3\cdot\lambda+4\cdot\mu+6\cdot\delta & = & 7\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{(II)}}\lambda=1-2\cdot\delta\Rightarrow\begin{array}{rcl}-2\cdot\mu & = & -2\\ 4\cdot\mu & = & 4\end{array}\xrightarrow{\mu=1}\lambda=1\Rightarrow\delta=\text{beliebig}$$

$$\Rightarrow D:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}+\delta\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-6\end{pmatrix}\subset E$$

Die Gerade g ist komplett in E enthalten!

Beispiel 3:

Geg.: $E:\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix};\quad g:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\delta\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-6\end{pmatrix}=\delta\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-6\end{pmatrix}$

$$E\cap g:\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}=\delta\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-6\end{pmatrix}\Leftrightarrow\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}-\delta\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}-\delta\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{lrcr}\text{(I)} & \lambda-2\cdot\mu+2\cdot\delta & = & -1\\ \text{(II)} & -3\cdot\lambda-6\cdot\delta & = & -2\\ \text{(III)} & 3\cdot\lambda+4\cdot\mu+6\cdot\delta & = & 3\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{(II)}}\lambda=\frac{2}{3}-2\cdot\delta\Rightarrow\begin{array}{rcr}-2\cdot\mu & = & -\frac{5}{3}\\ 4\cdot\mu & = & 1\end{array}\xrightarrow{\mu=\frac{5}{6}\wedge\mu=\frac{1}{4}}\text{keine Lösung!}$$

Im vorliegenden Fall verläuft die Gerade g in einer Parallelebene F zu E!

§ 4.1.2 Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Ebenen

Die Menge aller möglichen Schnittpunkte zweier Ebenen E und F bilden eine Schnittgerade g. Dabei sind die Sonderfälle, dass die Ebene F zur Ebene E parallel liegt (d.h. es existiert keine Schnittgerade), und dass die Ebene F mit der Ebene E identisch ist, zu berücksichtigen! Entsprechend der bisherigen Methoden können diese Aufgaben wieder durch das Lösen linearer Gleichungssyteme bearbeitet werden.

Beispiel 1:

$$\mathrm{E}:\vec{\mathrm{X}}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\qquad \mathrm{F}:\vec{\mathrm{X}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\varsigma\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\delta\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{E}\cap\mathrm{F}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\varsigma\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\delta\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}-\varsigma\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\delta\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{rcr}\lambda-\mu+\delta & = & 0\\ 2\cdot\lambda+\mu+\varsigma+\delta & = & -2\\ -\lambda+2\cdot\mu-\varsigma-\delta & = & 1\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\lambda & = & \mu-\delta\\ 3\cdot\mu+\varsigma-\delta & = & -2\\ \mu-\varsigma & = & 1\end{array}\Rightarrow\begin{array}{rcl}\lambda & = & \mu-\delta\\ 4\cdot\varsigma-\delta & = & -5\\ \mu & = & 1+\varsigma\end{array}\Rightarrow\begin{array}{rcl}\lambda & = & -4-3\cdot\varsigma\\ \delta & = & 5+4\cdot\varsigma\\ \mu & = & 1+\varsigma\end{array}\Rightarrow$$

$$\mathrm{g}:\vec{\mathrm{X}}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\8\\-4\end{pmatrix}+\varsigma\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\varsigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\qquad \mathrm{g}:\vec{\mathrm{X}}=\begin{pmatrix}-4\\-6\\6\end{pmatrix}+\varsigma\cdot\begin{pmatrix}-4\\-5\\5\end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad F: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \varsigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} + \delta\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E\cap F} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \varsigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} + \delta\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} - \varsigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} - \delta\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \lambda-\mu+\varsigma-\delta &=& 0\\ 2\cdot\lambda+\mu+2\cdot\varsigma+\delta &=& 0\\ -\lambda+2\cdot\mu-\varsigma+2\cdot\delta &=& 2\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda &=& \mu-\varsigma+\delta\\ 3\cdot\mu+3\cdot\delta &=& 0\\ \mu+\delta &=& 2\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \lambda &=& \mu-\varsigma+\delta\\ \mu &=& -\delta\\ \mu &=& 2-\delta\end{array} \Rightarrow \text{keine Schnittgerade}$$

Die Ebene F liegt parallel zur Ebene E!

Beispiel 3:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad F: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + \varsigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} + \delta\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E\cap F} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + \varsigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} + \delta\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} - \varsigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} - \delta\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \lambda-\mu+\varsigma-\delta &=& -1\\ 2\cdot\lambda+\mu+2\cdot\varsigma+\delta &=& 1\\ -\lambda+2\cdot\mu-\varsigma+2\cdot\delta &=& 2\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda &=& -1+\mu-\varsigma+\delta\\ 3\cdot\mu+3\cdot\delta &=& 3\\ \mu+\delta &=& 1\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \lambda &=& -1+\mu-\varsigma+\delta\\ \mu &=& 1-\delta\\ \mu &=& 1-\delta\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \lambda &=& -\varsigma\\ \mu &=& 1-\delta\\ \mu &=& 1-\delta\end{array}$$

$$\Rightarrow E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \varsigma\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} - \delta\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + \varsigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} + \delta\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \vec{X}: F$$

d.h.: die beiden Ebenen E und F sind identisch!

§ 5. Ebenen in Normalenform

§ 5.0 Vorbemerkung

Eine Ebene E in Parameterform (siehe § 4. Ebenen) wird festgelegt durch einen Stützvektor und zwei Richtungsvektoren. Diese Form besitzt den Nachteil, dass es für ein und dieselbe Ebene unendlich viele Darstellungsmöglichkeiten gibt. Es lässt sich jedoch zu jede dieser Darstellungen die Ursprungsgerade g finden, welche die Ebene in einem Winkel von 90° durchstößt (siehe Bild 18). Diese Gerade g lässt sich durch Ursprungsrepräsentanten bilden, die – bis auf eine multiplikative Konstante – übereinstimmen!

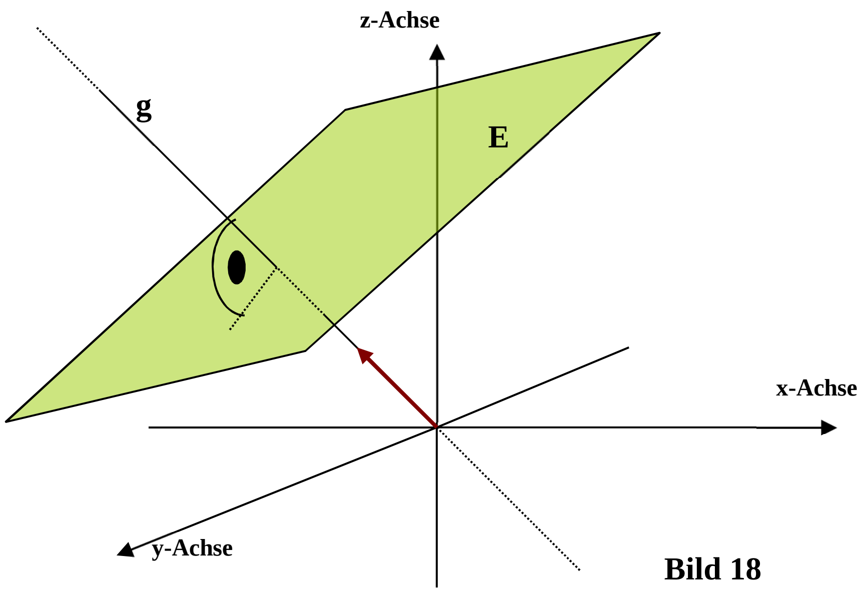


Bild 18

Diesen Ursprungsrepräsentanten nennt man, weil er senkrecht bzw. normal zur Ebene E liegt auch Normalenvektor der Ebene E. Mit seiner Hilfe ist es möglich die sog. Normalenform der Ebenengleichung zu bilden.

Zur Bestimmung eines Normalenvektors benötigt man den folgenden Satz:

Beh.: Das Skalarprodukt zweier aufeinander senkrecht stehender Repräsentanten besitzt den Wert Null.

Bew.:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \xrightarrow{\text{zu zeigen}} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Pythagoras}} \quad |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$\xrightarrow{\text{I. Bin. Formel}} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \Leftrightarrow 2 \cdot |\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

§ 5.1 Der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene E

Gegeben sei eine Ebene in Parameterform. Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht auf jedem Richtungsvektor der Ebene senkrecht; er erfüllt also für die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Gleichungen:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{mit } \vec{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n} := \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 = 0 \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2 + v_3 \cdot n_3 = 0$$

Bemerkung:

Der Normalenvektor lässt sich auch durch das Vektorprodukt berechnen! Es ergibt sich in allgemeiner Form:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

§ 5.2. Die Normalenform der Ebenengleichung

Vorüberlegung:

Angenommen $A(a_1 / a_2 / a_3)$ ist Aufpunkt[1] einer Ebene E und X $(x_1 / x_2 / x_3)$ ist ein weiterer Punkt der in der Ebene liegt. Betrachte die zu A und X gehörenden Ursprungsrepräsentanten:

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{X} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit}: A, X \in E$$

Offensichtlich liegt die Strecke (und damit der Repräsentant), die von A nach X führt in der Ebene, d.h.[2]: $\left(\vec{X} - \vec{a}\right) \subset E$. Das Skalarprodukt aus Normalenvektor der Ebene E und der Vektordifferenz $\left(\vec{X} - \vec{a}\right)$ liefert immer den Wert 0:

$$\vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{a}\right) = 0$$

[1] Der Punkt A kann aufgrund der mehrdeutigen Form der Parameterform ein beliebiger Punkt der Ebene sein!

[2] Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten ist gegeben durch: Endpunktsrepräsentant - Anfangspunktrepräsentant!

Definition:

Die Gleichung $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{a}) = 0$ heißt Normalenform der Ebene E in vektorieller Darstellung. Sie ist bis auf Vielfache und der Vorzeichenwahl eindeutig!

Beispiel:

Geg.: A(2 / 1 / 1), B(0 / 2 / 1) und C(-1 / 0 / 2) liegen in der Ebene E.
Ges.: Normalenform von E in vektorieller Form.
Lsng.:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu $\vec{n}$:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = -2 \cdot n_1 + n_2 = 0 \ \wedge \ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = -3 \cdot n_1 - n_2 + n_3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -2 \cdot n_1 + n_2 = 0 \Rightarrow n_2 = 2 \cdot n_1 \\ -3 \cdot n_1 - 2 \cdot n_1 + n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 5 \cdot n_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} = \underbrace{\begin{pmatrix} n_1 \\ 2 \cdot n_1 \\ 5 \cdot n_1 \end{pmatrix}}_{\substack{n_1 \text{ ist frei} \\ \text{wählbar, z.B.:1}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{E in NF}: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Beachte die folgenden Umformungen:

$$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{=: n_0} = n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 + n_0 = 0$$

Definition:

Die Gleichung $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 + n_0 = 0$ heißt Koordinatendarstellung (Koordinatenform) der Normalenform der Ebenengleichung E.

Für das Beispiel lautet die Koordinatendarstellung:

E in NF: $x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 - 9 = 0$

§ 5.3 Die Hesse`sche Normalenform der Ebenengleichung

Vorbemerkung / Definition:

Einen Vektor der Länge 1 nennt man Einheitsvektor. Jeder Vektor $\vec{a}$ lässt sich durch die skalare Multiplikation (entspricht nach § 0.1 einer zentrischen Streckung) auf die Länge 1 bringen. Diesen Vorgang nennt man normieren, einen so gebildeten Vektor nennt man normierten Einheitsvektor $\vec{a}^0$.

Beispiele:

1) $\vec{a} := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5 \rightarrow \vec{a}^0 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

2) $\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \rightarrow \vec{a}^0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) $\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \rightarrow \vec{a}^0 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Definition:

Ein Vektor $\vec{e}$ heißt kanonischer Einheitsvektor, wenn eine einzige seiner Komponenten Eins beträgt und alle anderen Komponenten den Wert Null besitzen!

Beispiele:

Kanonische Einheitsvektoren des R^3:

$$\vec{e}_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition:

Verwendet man zur Bestimmung der Normalenform einer Ebene E den normierten Normaleneinheitsvektor $\vec{n}^0$, so dass für die Orientierung von $\vec{n}^0$ $\mathbf{sgn}\left(-\vec{n}^0 \cdot \vec{a}\right) = -1$ gilt[3], so erhält man die Hesseform der Normalenform der Ebenengleichung E.

Beispiel:

NF$_E$: $x_1 - 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **HNF$_E$:** $\frac{-x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 13}{3} = 0$

---

[3] d.h.: die Konstante ist negativ (oder evtl. Null)

Beispiel:

Gegeben sei die Ebenegleichung $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist die Ebenegleichung in Normalenform sowie die Hesseform von E.

Lsng:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu NF_E **:**

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 0-2 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = \sqrt{6}$$

$$\rightarrow NF_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 - 7 = 0$$

$$\rightarrow HNF_E = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 - 7}{\sqrt{6}} = 0$$

§ 6 Anwendungen für die Hesse`sche Normalenform

§ 6.1 Abstand eines Punktes von einer Ebene

Gegeben sei die Ebene E sowie ein Punkt D $\notin$ E. Gesucht ist der Abstand d von D zu E.

Lösung:

O.B.d.A. sei die Parameterform von E gegeben durch:

$$E: \vec{X} = \vec{s} + \lambda \cdot \vec{r}_1 + \mu \cdot \vec{r}_2$$

O.B.d.A. sei die Normalenform von E gegeben durch:

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - \vec{n} \circ \vec{s} = 0$$

Der Punkt D liegt auf einer Geraden g $\perp$ E mit der Parameterform:

$$g: \vec{X} = \vec{d} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + \lambda \cdot n_1 \\ d_2 + \lambda \cdot n_2 \\ d_3 + \lambda \cdot n_3 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt S von g mit E ergibt sich durch Einsetzen von g in NF von E:

$$(d_1+\lambda\cdot n_1)\cdot n_1+(d_2+\lambda\cdot n_2)\cdot n_2+(d_3+\lambda\cdot n_3)\cdot n_3-\vec{n}\circ\vec{s}=$$
$$d_1\cdot n_1+\lambda\cdot n_1^2+d_2\cdot n_2+\lambda\cdot n_2^2+d_3\cdot n_3+\lambda\cdot n_3^2-\vec{n}\circ\vec{s}\Rightarrow$$

$$\lambda=\frac{d_1\cdot n_1+d_2\cdot n_2+d_3\cdot n_3-\vec{n}\circ\vec{s}}{n_1^2+n_2^2+n_3^2}=\frac{d_1\cdot n_1+d_2\cdot n_2+d_3\cdot n_3-\vec{n}\circ\vec{s}}{|\vec{n}|^2}$$

$$\Rightarrow\vec{S}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}+\frac{d_1\cdot n_1+d_2\cdot n_2+d_3\cdot n_3-\vec{n}\circ\vec{s}}{|\vec{n}|^2}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$$

Der Abstand d zwischen D und E ergibt sich durch den Abstand von D und S:

$$d=|\vec{s}-\vec{d}|=\left|\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}+\frac{d_1\cdot n_1+d_2\cdot n_2+d_3\cdot n_3-\vec{n}\circ\vec{s}}{|\vec{n}|^2}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}\right|$$
$$=\left|\frac{d_1\cdot n_1+d_2\cdot n_2+d_3\cdot n_3-\vec{n}\circ\vec{s}}{|\vec{n}|^2}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\right|$$
$$=\frac{d_1\cdot n_1+d_2\cdot n_2+d_3\cdot n_3-\vec{n}\circ\vec{s}}{|\vec{n}|^2}\cdot\left|\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\right|=\frac{d_1\cdot n_1+d_2\cdot n_2+d_3\cdot n_3-\vec{n}\circ\vec{s}}{|\vec{n}|^2}\cdot|\vec{n}|$$
$$=\frac{d_1\cdot n_1+d_2\cdot n_2+d_3\cdot n_3-\vec{n}\circ\vec{s}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}\cdot\left[\vec{d}-\vec{s}\right]=\vec{n}^0\cdot\left[\vec{d}-\vec{s}\right]$$

Damit gilt:

Der Abstand eines Punktes D (d_1; d_2; d_3) von einer Ebene E ist gegeben durch[4]:

$$d=\vec{n}^0\circ\left[\vec{d}-\vec{s}\right]=\frac{1}{|\vec{n}|}\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}\right]=\frac{n_1\cdot d_1+n_2\cdot d_2+n_3\cdot d_3+\vec{n}\circ\vec{s}}{\left[-\mathbf{sgn}\left(-\vec{n}^0\cdot\vec{s}\right)\right]|\vec{n}|}$$

Denn:

$$|\lambda\cdot\vec{n}|=\left|\lambda\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{\lambda\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\lambda\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}}=\sqrt{\lambda^2\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}}=|\lambda|\cdot|\vec{n}|$$

[4] Konkret: Setze den Ortsvektor des Punktes D in die Hesseform der Ebenengleichung ein!

Beispiel:

Gegeben seien die Punkte A(1 | 2 | 3), B(1 | 1| 2) und C(2 | 2 | 4) sowie der Punkt D(-1 | -3 | 1). Berechne den Abstand von D zu der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C festgelegt wird!

Lösung:

1. Parameterform der Ebene E:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Normalenform der Ebene E:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{mit } |\vec{n}| = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow NF_E: \; x_1 + x_2 - x_3 - 0 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

3. Hesseform der Ebene E:

$$HNF_E: \; \frac{x_1 + x_2 - x_3}{\sqrt{3}} = 0$$

4. Abstand von D zur Ebene E:

$$d(D; E) = \frac{d_1 + d_2 - d_3}{\sqrt{3}} = \frac{-1-3-1}{\sqrt{3}} = -\frac{5}{3} \cdot \sqrt{3}$$

Tatsächlich besitzt der Punkt D den berechneten Abstand von der Ebene!

§ 6.1.1 Diskussion des Vorzeichens von d(D; E)

Die Ebene teilt den dreidimensionalen Raum in zwei sog. Halbräume, d.h.: in ein „Oben und Unten“ oder auch „Vorne und Hinten“. Der Ursprung und der Punkt D dessen Abstand von der Ebene E ermittelt werden soll können im gleichen „Halbraum“ oder aber in den verschiedenen „Halbräumen“ liegen (im Falle des Beispiels, d.h. wenn der Ursprung in der Ebene liegt, ist eine solche Unterscheidung nicht möglich!). Es gilt die folgende Unterscheidungsregel:

d > 0: Ursprung und D liegen auf verschiedenen Seiten von E
d = 0: D ist Element von E
d < 0: Ursprung und D liegen auf derselben Seite von E

§ 6.2 Berechnung des Abstandes einer zur Ebene E parallelen Geraden g

Jeder Punkt von g besitzt zu E denselben Abstand. Wähle nun einen beliebigen Punkt D auf g und berechne seinen Abstand zu E mit Hilfe der HNF_E.

§ 6.3 Berechnung des Abstandes zweier windschiefer Geraden g und h

Vorüberlegung:

Windschiefe Geraden schneiden sich nicht. Offensichtlich ist die direkte Berechnung mit der Wahl zweier Punkte von g und h nicht so einfach, da dieser Ansatz letztlich zu einer Optimierungsaufgabe mit zwei Variablen führt!

Beispiel:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap h: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ \lambda = \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Zur Abstandsberechnung mit Hilfe der Analysis:

$$\text{Wähle } P \in g \text{ und } Q \in h:$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit: } d(g;h) = d(\lambda;\mu) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(1-\mu-\lambda)^2 + (\mu-\lambda)^2 + \mu^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial d}{\partial \lambda} = \frac{(\mu+\lambda-1)-\mu+\lambda}{\sqrt{(1-\mu-\lambda)^2 + (\mu-\lambda)^2 + \mu^2}} = \frac{2\cdot\lambda-1}{\sqrt{(1-\mu-\lambda)^2 + (\mu-\lambda)^2 + \mu^2}} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial d}{\partial \mu} = \frac{(\mu+\lambda-1)+\mu-\lambda+\mu}{\sqrt{(1-\mu-\lambda)^2 + (\mu-\lambda)^2 + \mu^2}} = \frac{3\cdot\mu-1}{\sqrt{(1-\mu-\lambda)^2 + (\mu-\lambda)^2 + \mu^2}} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow d(g;h) = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Hier bleiben wir allerdings aus rechentechnischen Gründen den Nachweis schuldig, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt!

Analytische Variante:

Man bestimmt zunächst eine Ebene E, die eine der beiden Geraden (z.B. g) enthält und zu der die andere Gerade (hier: h) parallel verläuft! Offensichtlich besitzen alle Punkte von h zu E denselben Abstand d, der zugleich dem Abstand der windschiefen Geraden entspricht!

Beispiel:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad h: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ mit: } \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-0\\1\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \text{ mit: } |\vec{n}| = \sqrt{6}$$

$$\rightarrow NF_E: x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 3 = 0$$

$$\rightarrow HNF_E: \frac{x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 3}{\sqrt{6}} = 0$$

Aufpunkt von h einsetzen ($\Rightarrow$ Abstand):

$$\rightarrow d(g;h) = \frac{2+0+2-3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

§ 6.4 Ergänzung

§ 6.4.1 Abstandsberechnung eines Punktes D zu einer Geraden g

Gegeben sei die Gerade g in Parameterform, sowie ein Punkt D mit dem Ortsvektor $\vec{d}$. Auch hier gibt es verschiedene Möglichkeiten den Abstand von D zu g zu ermitteln!

Variante 1:

$$\left.\begin{array}{l} g: \vec{X} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{r} \rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 + \lambda_0 \cdot r_1\\a_2 + \lambda_0 \cdot r_2\\a_3 + +\lambda_0 \cdot r_3\end{pmatrix} \\ \vec{d} = \begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix} \end{array}\right\} \xrightarrow{\overrightarrow{PD}} \begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_1 + \lambda_0 \cdot r_1\\a_2 + \lambda_0 \cdot r_2\\a_3 + +\lambda_0 \cdot r_3\end{pmatrix}$$

$$d(g;D) = \left|\overrightarrow{PD}\right| = \sqrt{[d_1 - (a_1 + \lambda_0 \cdot r_1)]^2 + [d_2 - (a_2 + \lambda_0 \cdot r_2)]^2 + [d_3 - (a_3 + \lambda_0 \cdot r_3)]^2}$$

$$\frac{dd}{d\lambda_0} = -\frac{r_1 \cdot [d_1 - (a_1 + \lambda_0 \cdot r_1)] + r_2 \cdot [d_2 - (a_2 + \lambda_0 \cdot r_2)] + r_3 \cdot [d_3 - (a_3 + \lambda_0 \cdot r_3)]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} [d_i - (a_i + \lambda_0 \cdot r_i)]^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 \cdot d_1 - r_1 \cdot a_1 - \lambda_0 \cdot r_1^2 + r_2 \cdot d_2 - r_2 \cdot a_2 - \lambda_0 \cdot r_2^2 + r_3 \cdot d_3 - r_3 \cdot a_3 - \lambda_0 \cdot r_3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 \cdot d_1 - r_1 \cdot a_1 + r_2 \cdot d_2 - r_2 \cdot a_2 + r_3 \cdot d_3 - r_3 \cdot a_3 - \lambda_0 \cdot \left(r_1^2 - r_2^2 - r_3^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{r_1 \cdot d_1 - r_1 \cdot a_1 + r_2 \cdot d_2 - r_2 \cdot a_2 + r_3 \cdot d_3 - r_3 \cdot a_3}{r_1^2 - r_2^2 - r_3^2}$$

Einsetzen von λ_0 in die Abstandsformel liefert den gesuchten Wert!

Variante 2:

Verwende das Skalarprodukt:

$$\left.\begin{array}{l} g: \vec{X} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{r} \rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda_0 \cdot r_1 \\ a_2 + \lambda_0 \cdot r_2 \\ a_3 + +\lambda_0 \cdot r_3 \end{pmatrix} \\ \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \xrightarrow{\overrightarrow{PD}} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 + \lambda_0 \cdot r_1 \\ a_2 + \lambda_0 \cdot r_2 \\ a_3 + +\lambda_0 \cdot r_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{gleich Null}]{\text{kürzeste Entfernung, wenn Skalarprodukt zwischen } \overrightarrow{PD} \text{ und } \vec{r}} \left[\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 + \lambda_0 \cdot r_1 \\ a_2 + \lambda_0 \cdot r_2 \\ a_3 + +\lambda_0 \cdot r_3 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 \cdot d_1 - r_1 \cdot a_1 - \lambda_0 \cdot r_1^2 + r_2 \cdot d_2 - r_2 \cdot a_2 - \lambda_0 \cdot r_2^2 + r_3 \cdot d_3 - r_3 \cdot a_3 - \lambda_0 \cdot r_3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 \cdot d_1 - r_1 \cdot a_1 + r_2 \cdot d_2 - r_2 \cdot a_2 + r_3 \cdot d_3 - r_3 \cdot a_3 - \lambda_0 \cdot \left(r_1^2 - r_2^2 - r_3^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{r_1 \cdot d_1 - r_1 \cdot a_1 + r_2 \cdot d_2 - r_2 \cdot a_2 + r_3 \cdot d_3 - r_3 \cdot a_3}{r_1^2 - r_2^2 - r_3^2}$$

Einsetzen von λ_0 in die Abstandsformel liefert den gesuchten Wert!

Beispiel:

Gegeben sei die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowie $D(4\,|\,2\,|\,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 + \lambda \\ 0 \\ -1 - 2 \cdot \lambda \end{pmatrix} \\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 \\ 2 + 2 \cdot \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PD}\right| = \sqrt{(2-\lambda)^2 + 4 + 4 \cdot (1+\lambda)^2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 \\ 2 + 2 \cdot \lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 - \lambda - 4 - 4 \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow d(g;P) = \sqrt{\left(2 + \frac{2}{5}\right)^2 + 4 + 4 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{100}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{280}}{5} \approx 3{,}35$$

§ 6.4.2 Lagebeziehungen zwischen Ebenen

Mit Hilfe der Normalenformen bzw. der Normalenvektoren zweier (oder mehrerer) Ebenen lassen sich schnell Aussagen über die gegenseitige Lage gewinnen.

Vorüberlegung:

Beh.: Für kollineare (parallele und antiparallele) Vektoren des R³ gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Bew.:

$$\text{Kollinear heißt}: \ \vec{b} = \varphi \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi \cdot a_1 \\ \varphi \cdot a_2 \\ \varphi \cdot a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot \varphi \cdot a_3 - a_3 \cdot \varphi \cdot a_2 \\ a_1 \cdot \varphi \cdot a_3 - a_3 \cdot \varphi \cdot a_1 \\ a_1 \cdot \varphi \cdot a_2 - a_2 \cdot \varphi \cdot a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

1) Zwei Ebenen E und F sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren kollinear sind, d.h.: $\vec{n}_E \times \vec{n}_F = 0$
2) Zwei Ebenen E und F sind senkrecht zueinander, wenn ihre Normalenvektoren einen 90° Winkel bilden d.h.: $\vec{n}_E \times \vec{n}_F = 0$
3) Der Schnittwinkel zweier Ebenen E und F ist gegeben durch den Winkel φ, den ihre Normalenvektoren miteinander einschließen.

Es gilt: $\quad \mathbf{cos}\,\varphi = \dfrac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_F}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$

§ 6.4.3 Winkel zwischen beliebigen Vektoren (Beweis):

Der Winkel φ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben durch: $\mathbf{cos}\,\varphi = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Elementargeometrischer Beweis:

Cosinussatz:

$$\left|\left(\vec{b} - \vec{a}\right)\right|^2 = |\vec{a}|^2 + c - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \mathbf{cos}\,\varphi$$

$$\text{NR}: \ \left|\left(\vec{b} - \vec{a}\right)\right|^2 = \sqrt{\left(b_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 + a_1^2\right) + \left(b_2^2 - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 + a_2^2\right) + \left(b_3^2 - 2 \cdot a_3 \cdot b_3 + a_3^2\right)}^{\,2}$$

$$= b_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 + a_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot a_3 \cdot b_3 + a_3^2$$
$$= \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) + \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) - 2 \cdot \left(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3\right)$$
$$= |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b}$$

$$\left|\left(\vec{b} - \vec{a}\right)\right|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \mathbf{cos}\,\varphi \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \mathbf{cos}\,\varphi$$

$$\Leftrightarrow -2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = -2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \mathbf{cos}\,\varphi \Leftrightarrow \mathbf{cos}\,\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

§ 7 Spiegelungen

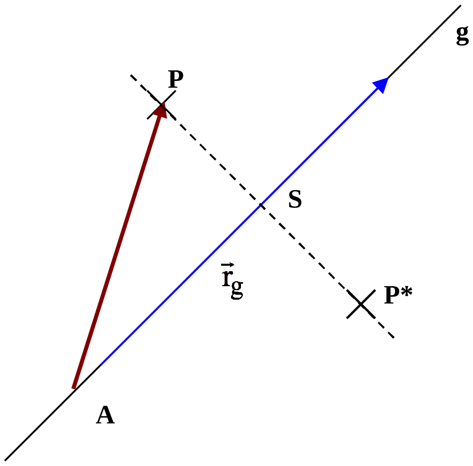
§ 7.1 Spiegelung eines Punktes P an einer Geraden g

Um einen Punkt P an einer Geraden g zu spiegeln betrachtet man die folgende Vektorgleichung (Bezeichnungen siehe Bild):

$$\vec{p}^* = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PS}$$

wobei S den Lotfußpunkt von P auf g bezeichnet!

Man erhält S durch eine senkrechte Projektion de Vektors $\overrightarrow{AP}$ auf den Richtungsvektor $\vec{r}_g$ der Geraden g.



Herleitung des Ortsvektors[5] $\vec{s}$ von S mit Hilfe des Cosinussatzes für rechtwinklige Dreiecke. Es sei A der Aufpunkt der Geraden mit dem Ortsvektor $\vec{a}$. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{AS}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right| \cdot \cos(\angle SAP) \\ \cos(\angle SAP) = \dfrac{\vec{r}_g \circ \overrightarrow{AP}}{\left|\vec{r}_g\right| \cdot \left|\overrightarrow{AP}\right|} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AS}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right| \cdot \frac{\vec{r}_g \circ \overrightarrow{AP}}{\left|\vec{r}_g\right| \cdot \left|\overrightarrow{AP}\right|} = \frac{\vec{r}_g \circ \overrightarrow{AP}}{\left|\vec{r}_g\right|}$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} \vec{r}_g = \lambda \cdot \overrightarrow{AS} \\ \to \lambda = \dfrac{\left|\vec{r}_g\right|}{\left|\overrightarrow{AS}\right|} \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{AS} = \vec{r}_g \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\vec{r}_g\right|} = \vec{r}_g \cdot \frac{\vec{r}_g \circ \overrightarrow{AP}}{\left|\vec{r}_g\right|^2} \Leftrightarrow \vec{s} = \vec{r}_g \cdot \frac{\vec{r}_g \circ \overrightarrow{AP}}{\left|\vec{r}_g\right|^2} + \vec{a}$$

Damit folgt für den Ortsvektor $\vec{p}^*$ des Spiegelpunktes P* von P:

$$\vec{p}^* = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = \vec{p} + 2 \cdot \vec{s} - 2 \cdot \vec{p} = 2 \cdot \vec{r}_g \cdot \frac{\vec{r}_g \circ \vec{p} - \vec{r}_g \circ \vec{a}}{\left|\vec{r}_g\right|^2} + 2 \cdot \vec{a} - \vec{p}$$

[5] **Hiermit ist insbesondere bewiesen:**

Die senkrechte Projektion eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ ist gegeben durch: $\vec{b}_{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\vec{a} \circ \vec{a}} \cdot \vec{a} = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2} \cdot \vec{a}$

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} g: \vec{X} &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \\ P(-2\,|\,3\,|\,0) \rightarrow \vec{p} &= \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \vec{p}^{\,*} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1-1}{2} + \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^*(4\,|\,-3\,|\,0)$$

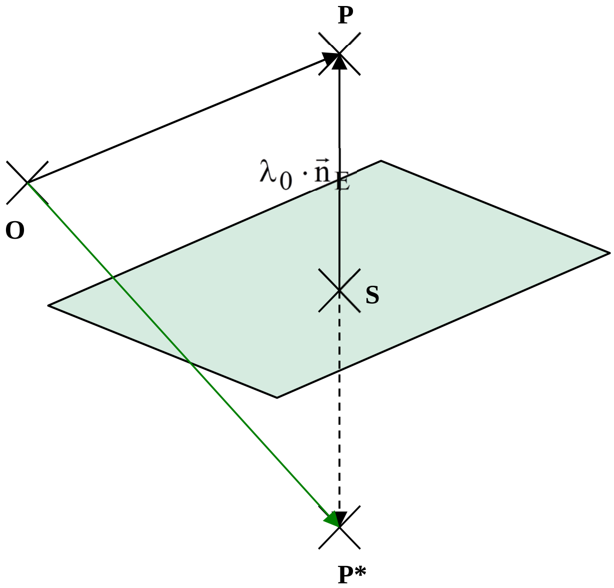
§ 7.2 Spiegelung eines Punktes P an einer Ebene E

Um einen Punkt P an einer Ebene E zu spiegeln betrachtet man die folgende Vektorgleichung (Bezeichnungen siehe Bild):

$$\vec{p}^{\,*} = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PS}$$

wobei S den Lotfußpunkt von P auf E bezeichnet!

Man erhält S durch den Schnitt einer Geraden g mit Aufpunkt P und dem Normalenvektor der Ebene E als Richtungsvektor.



Herleitung des Ortsvektors von P:

Voraussetzungen[6]:

Es sei $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1 + \lambda \cdot n_1\\p_2 + \lambda \cdot n_2\\p_3 + \lambda \cdot n_3\end{pmatrix}$ und $NF_E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - n_0 = 0$

[6] Das ist übrigens eine O.B.d.A. Vereinbarung!

Lösung:

1) Bestimmung des Schnittpunktes S von g mit E

$$g \cap E \rightarrow \vec{X}_g \text{ in } NF_E\textbf{ :}$$

$$n_1 \cdot (p_1 + \lambda \cdot n_1) + n_2 \cdot (p_2 + \lambda \cdot n_2) + n_3 \cdot (p_3 + \lambda \cdot n_3) - n_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot |\vec{n}|^2 + \vec{n} \circ \vec{p} - n_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-\vec{n} \circ \vec{p} + n_0}{|\vec{n}|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \frac{\vec{n} \circ \vec{p} - n_0}{|\vec{n}|^2} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmung des Ortsvektors von P*

$$\vec{p}\textbf{*} = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = \vec{p} + 2 \cdot (\vec{s} - \vec{p}) =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \frac{\vec{n} \circ \vec{p} - n_0}{|\vec{n}|^2} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{\vec{n} \circ \vec{p} - n_0}{|\vec{n}|^2} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Gegeben sei die Ebene $NF_E\textbf{ :} 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 + 3 = 0$ sowie der Punkt P(4 | 3 | 4). Gesucht ist der Spiegelpunkt P* von P an E.

Lösung:

$$\vec{p}\textbf{*} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{26}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/9 \\ -25/9 \\ 62/9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow P\textbf{*}\left(-16/9 \mid -25/9 \mid 62/9\right)$$

§ 8 Der Kreis in der analytischen Geometrie

Auch Kreise lassen sich mit Hilfe von Vektoren darstellen. Betrachtet die folgende Überlegungsskizze:

Da alle Punkte auf der Kreislinie denselben Abstand (Kreisradius r) vom Mittelpunkt M besitzen müssen gilt:

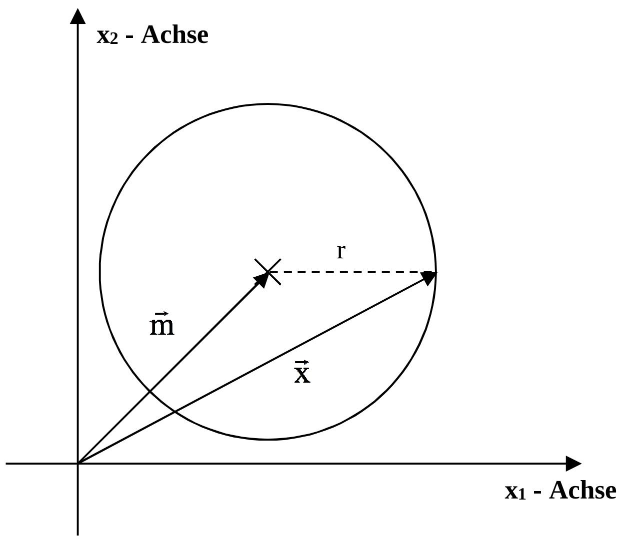
$$|\vec{r}| =: r = \text{konstant}$$

Für den Vektor $\vec{r}$ gilt:

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{m}$$

Damit ergibt sich die Vektorform der Kreisgleichung:

$$(\vec{x} - \vec{m})^2 = |\vec{r}|^2 = r^2$$



Aufgabenbeispiel:

Bestimme die Kreisgleichung des Innkreises eines Quadrates mit den Eckpunkten A(4 / 1 / 1), B(6 / 3 / 1), C(4 / 5 / 1) und D.

1) Bestimmung des fehlenden Eckpunktes (ggf. mit Skizze): D(2 / 3 / 1)
2) Bestimmung des Mittelpunktes des Kreises (Schnittpunkt der Diagonalen):
   Entweder durch „geschicktes Sehen“: M(4 / 3 / 1)
   Oder durch Rechnung:

$$d_1 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1 \cap d_2 : \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcll} 4 \cdot \mu & = & 2 & \Rightarrow \mu = \tfrac{1}{2} \\ 4 \cdot \lambda & = & 2 & \Rightarrow \lambda = \tfrac{1}{2} \\ 0 & = & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow M(4/3/1)$$

3) Berechnung von r^2 (Länge des Vektors von M zur Seitenmitte einer Quadratseite)^2:

   Mittelpunkt S von [AB]: $\vec{s} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S(5/2/1)$

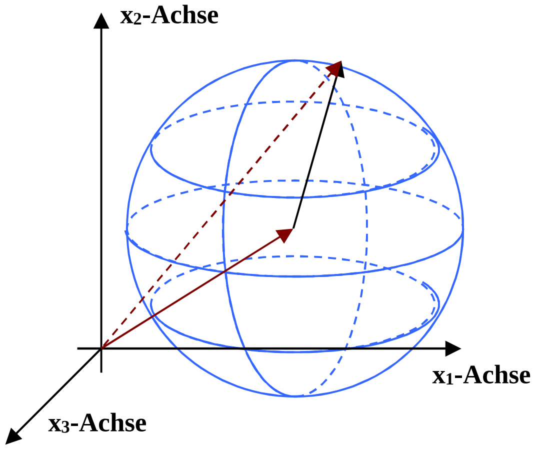
$$\Rightarrow r^2 = (\vec{s} - \vec{m})^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^2 = 2 \quad (\rightarrow r = \sqrt{2}) \text{ Kreisgleichung: } \Rightarrow k : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 = 2$$

§ 9 Die Kugel in der analytischen Geometrie

Dieselbe Überlegung wie bei der Herleitung der vektoriellen Form der Kreisgleichung liefert die vektorielle Form der Kugelgleichung:

Es sei M der Mittelpunkt einer Kugel mit Radius r. Dann gilt für die Vektorform der Kugelgleichung:

$$(\vec{x}-\vec{m})^2 = r^2$$



Aufgabenbeispiel:

Die Ebene E ist durch A(1 / 0 / 2), B(3 / 2 / 0) und C(1 / 2 / 3) festgelegt. Zeigen Sie: Der Punkt M (4 / 3 / 3) ist nicht in E enthalten und bestimmen Sie die Gleichung der Kugel mit Mittelpunkt M, welche die Ebene E berührt! Bestimmen Sie auch das Volumen dieser Kugel.

1) Ebenengleichung:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & e_1 \\ 2 & 2 & e_2 \\ -2 & 1 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 14$$

$$NF_E: \; 6 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 14 = 0$$

$$M \text{ in } NF_E: \; 6 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 14 = 16 \neq 0 \Rightarrow M \notin E$$

2) Kugelradius (Abstand M zu E):

$$|\vec{n}| = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} \quad \rightarrow d = r = \frac{6 \cdot m_1 - 2 \cdot m_2 + 4 \cdot m_3 - 14}{\sqrt{56}} = \frac{2}{7} \cdot \sqrt{56}$$

3) Kugelgleichung:

$$(\vec{x}-\vec{m})^2 = r^2 \rightarrow \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{32}{7}$$

4) Volumen:

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{56}}{7} LE \right)^3 \cdot \pi = 40{,}94 VE$$

§ 10 Übungsaufgaben

Aufgaben zu Ebenen

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Ebenengleichungen der Elementarebenen[7] in Parameter und in Normalenform!

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Ebenengleichung von E mit P(2; 1; -1), Q(3; 1; -3) und R(-1; 0; 2) $\in$ E. Geben Sie die Gleichungen der Spurgeraden[8] an und bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden G mit P, Q $\in$ G .

Aufgabe 3:

Gegeben seien die Punkte A(-2; 3; 4), B(-4; 5; 6) sowie C(2; 3; 1).

a) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Ebene E, die die Punkte A, B und C enthält, in Parameter- und in Normalenform.

b) Zeigen Sie: $G: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist vollständig in E enthalten.

c) Berechnen Sie die Schnittgerade zwischen E und der Ebene F: $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3 = 0$.

d) Bestimmen Sie eine Darstellung von F in Parameterform!

e) Bestimmen Sie die Spurgeraden von F und die Spurpunkte von G.

Aufgabe 4:

In einem KKS sind der Punkt C(-3; 2; 1), die Ebene E_1: $2x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$ und die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathrm{R}$, gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass der Punkt C auf der Geraden g liegt.

   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes A der Geraden g mit E_1.

Die Ebene E_2 enthält die Gerade g und steht senkrecht auf der Ebene E_1.

2.a) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_2 in Normalenform auf.
[mögliches Ergebnis: E_2: $x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3 = 0$]

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E_1 und E_2.

c) Weisen Sie nach, dass Punkt A aus Teilaufgabe 1.b) mit Punkt B $\left(0; 2 \cdot \sqrt{2}; -2 \cdot \sqrt{2}\right)$ und dem Ursprung O des Koordinatensystems ein rechtwinkliges Dreieck bildet. Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Dreiecks.

---

[7] Die Elementarebenen werden von den Koordinatenachsen gebildet! Skizze ist bei der Auswahl dreier Punkte zwar nicht nötig, aber u.U. hilfreich!

[8] Die Koordinatenachsen bilden sog. Elementarebenen! Schneidet eine beliebige Ebene eine Elementarebene, so nennt man die Schnittgerade Spurgerade.

Aufgaben zu Geraden

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Vektormenge $V := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1-a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 1-a \end{pmatrix} \right\}$ mit a ∈ R beliebig. Für welche Werte des Parameters a sind die Vektoren aus V linear unabhängig?

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} := \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Prüfen Sie die Vektoren $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ auf lineare Unabhängigkeit.

b) Begründen Sie kurz, warum nicht alle vier Vektoren linear unabhängig voneinander sein können. Wie lässt sich Vektor $\vec{d}$ mit Hilfe von $\vec{a}, \vec{b},$ und $\vec{c}$ darstellen?

Aufgabe 3:

Gegeben seien die Punkte A(-1; 2; -1), B(5; 2; -1), C(2; 7; 3) und D(-1; 12; 7). Die Punkte A und C liegen auf einer Geraden g; die Punkte B und D liegen auf einer Geraden h.

a) Bestimmen Sie je eine Parameterform der Geradengleichungen von g und h.
b) Berechnen Sie – im Falle der Existenz - den Schnittpunkt von g und h.
c) Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck! Erstellen Sie eine Zeichnung dieses Dreiecks.
d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S von ΔABC und die Koordinaten des Seitenmittelpunktes M von [AB].
e) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ΔABC. Um welche besondere Dreiecksart handelt es sich hier?

Aufgabe 4:

Gegeben seien die Punkte P(1; 2; -1), Q(-2; -3; 1), S(3; 5; -2) und T(3; 1; 4). Die Punkte P und Q liegen auf einer Geraden g; die Punkte S und T liegen auf einer Geraden h. Bestimmen Sie je eine Parameterform der Geradengleichungen von g und h. Wie liegen diese Geraden zueinander?

§ 10. 1 Elementarebenen

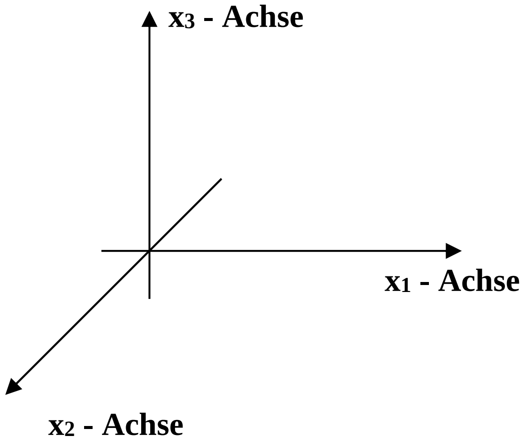
in Parameterform:

$$E_{x_{1/2}}: \vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{x_{1/3}}: \vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{x_{2/3}}: \vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skizze:



in Normalenform:

$$\vec{n}_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{NF von } E_{x_{1/2}}: \ x_3 = 0$$

$$\vec{n}_{1/3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{NF von } E_{x_{1/3}}: \ x_2 = 0 \qquad \vec{n}_{2/3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{NF von } E_{x_{2/3}}: \ x_1 = 0$$

Aufgabe:

Gegeben seien die Punkte A(2 / 3 / -2), B(3 / -1 / -2) sowie C(4 / 0 / -2). Die Punkte ABC liegen in der Ebene E und bestimmen dort das Dreieck ABC.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC.
b) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von E in Normalenform! Welche Schlussfolgerung lässt das Ergebnis zu?
c) Geben Sie eine Ebenengleichung einer Ebene F, die Parallel zu E liegt und den Punkt S(5 / 3 / 4) enthält!
d) Gegeben sei weiter die Gerade G: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \vartheta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Schnittpunkte N von G und E sowie M von G mit F.
e) Die Gerade G und der Punkt S legen eine Ebene H fest! Geben Sie eine Ebenengleichung von H in Parameterform an und bestimmen Sie die Schnittgeraden von H und E sowie H und F.
f) Berechnen Sie die Spurgeraden, die beim Schnitt der Elementarebenen mit H entstehen!
g) Berechnen Sie die Spurpunkte, die beim Schnitt von G mit den Elementarebenen entstehen!
h) Das Dreieck ABC bildet mit dem Punkt S eine Pyramide ABCS. Berechnen Sie unter Verwendung der Formelsammlung das Volumen dieser Pyramide!