## zu Analysis / Aufgabengruppe 2:

### zu Aufgabe 1:

a) Nachweis waagrechte Asymptote für y = a: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a \ \ mit - \infty < a < +\infty$ (unter Beachtung von $ID_f$)

Strenge Monotonie: $\begin{cases} f'(x) < 0 \to G_f \ streng \ monoton \ fallend \\ f'(x) > 0 \to G_f \ streng \ monoton \ steigend \end{cases}$

b) Rechtecksfläche: $A_R = Länge \ mal \ Breite$
Ist die Rechtecksfläche in Abhängigkeit einer Variablen gegeben, so lässt sich ein eventuell vorhandener Extremwert mit dem Ansatz $A'_R(k) = 0$ ermitteln.

c) Integration der einfach-allgemeinen natürlichen Exponentialfunktion …

$$\int [b \cdot e^{a \cdot x}] dx = \frac{b}{a} \cdot e^{a \cdot x} + c$$

Die Konstante c kann bei bestimmten Integralen stets weggelassen werden!

### zu Aufgabe 2:

a) Für Funktionen der Form: $k(x) = \frac{a}{f(x)} \ \ mit \ a > 0$ gilt:

Strenge Monotonie: $Ist \ G_f \ streng \ monoton \begin{cases} fallend, so \ ist \ G_k \ streng \ monoton \ steigend \\ steigend, so \ ist \ G_k \ streng \ monoton \ fallend \end{cases}$

Für Funktionen der Form: $k(x) = \frac{a}{f(x)} \ \ mit \ a < 0$ gilt:

Strenge Monotonie: $Ist \ G_f \ streng \ monoton \begin{cases} fallend, so \ ist \ G_k \ streng \ monoton \ fallend \\ steigend, so \ ist \ G_k \ streng \ monoton \ steigend \end{cases}$

dies folgt z.B. aus …

$$k'(x) = \frac{-a \cdot f'(x)}{\underbrace{[f(x)]^2}_{>0}}$$

(oder einer geeigneten Nenner-Überlegung)

b) ---

c) Momentane Änderungsrate einer Funktion $f$ in einem Punkt $P(x_0; \ f(x_0))$: $f'(x_0) = m_P$

d) Ist eine (momentane) Änderungsrate in einem Punkt $P(x_0; \ f(x_0))$ maximal, so muss ihre Ableitung in $x_0$ Null werden. Die Ableitung einer Funktion $f'(x)$, die eine Änderungsrate einer Funktion $f(x)$ beschreibt ist die zweite Ableitung $f''(x)$ von $f(x)$ (Krümmungs- und „Wendepunkts“-funktion).

## zu Stochastik / Aufgabengruppe 2:

### zu Aufgabe 1:

a) Verwendung der Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

b) Binomialverteilte Zufallsgrößen gehören zu Experimenten mit Zurücklegen …

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Experimente ohne Zurücklegen werden durch die Multinomialverteilung beschrieben:

$$M(N; K \ n; k) = \frac{\binom{N}{n} \cdot \binom{K}{k}}{\binom{N+K}{n+k}} \quad oder \ allgemein \ ...$$

$$M(N_1; N_2; N_3; ... N_m; \ n_1; n_2; n_3; ... n_m;) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdot \binom{N_2}{n_2} \cdot \binom{N_3}{n_3} \cdot ... \cdot \binom{N_m}{n_m}}{\binom{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_m}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m}}$$

**zu Aufgabe 2:**

a) A heißt stochastisch unabhängig von B, wenn: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
b) ---

**Ergänzung:**

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ eines Ereignisses A unter dem sicheren Wissen, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist, berechnet sich durch:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A heißt stochastisch unabhängig von B, wenn:

$$P_B(A) = P(A),\ \ denn: P_B(A) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leftrightarrow P_B(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

**zu Aufgabe 3:**

a) Zugrunde gelegt werden (kumulierte) binomialverteilte Zufallsgrößen …

$$B(n; p; k \leq k_0) = \sum_{k=0}^{k_0} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

oder auch …

$$B(n; p; k > k_0) = 1 - B(n; p; k \leq k_0) = 1 - \sum_{k=0}^{k_0} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

b) ---

**c) (mmm) – Aufgabe:**

**hier …**
**Typ 2:**
Geg.: $n$ sowie $k > 0$ bzw. $k \geq 1$ und die Gesamtwahrscheinlichkeit $\alpha$
Ges.: $p$
**Lsng.:** (hier für „>" durchgeführt; analog mit „≥" oder mit „=" durchzuführen…)

$$B(n; p; k > 0) = 1 - B(n; p; k = 0) > \alpha$$
$$B(n; p; k = 0) < 1 - \alpha$$
$$\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = (1-p)^n < 1 - \alpha$$
$$(1-p) < \sqrt[n]{1-\alpha}$$
$$p > 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$$

**Der Vollständigkeit halber …**
**Typ 1:**
Geg.: $p$ sowie $k > 0$ bzw. $k \geq 1$ und die Gesamtwahrscheinlichkeit $\alpha$
Ges.: $n$
**Lsng.:** (hier für „>" durchgeführt; analog mit „≥" oder mit „=" durchzuführen…; das Ergebnis für n wird immer aufgerundet!)

$$B(n; p; k > 0) = 1 - B(n; p; k = 0) > \alpha$$
$$B(n; p; k = 0) < 1 - \alpha$$
$$\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = (1-p)^n < 1 - \alpha$$
$$n \cdot \ln(1-p) < \ln(1-\alpha)$$
$$n > \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)}$$

## zu Geometrie / Aufgabengruppe 2:

a) $\vec{a}\circ\vec{b} = 0 \leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene steht senkrecht auf der Ebene. Ein dazu senkrechter Vektor $\vec{b}$ erfüllt die Bedingungsgleichung $\vec{n}\circ\vec{b} = 0$, d.h. entweder liegt eine Gerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{b}$ in der Ebene E (unendlich viele Schnittpunkte) oder sie verläuft parallel zu E (kein Schnittpunkt).

b) Winkelformel für Gerade und Ebene … $\sin\alpha = \frac{\vec{n}\circ\vec{b}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{b}|}$ oder aber $\alpha = 90° - \cos^{-1}\frac{\vec{n}\circ\vec{b}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{b}|}$

c) Abstandsberechnungen Punkt $P(p_1;\ p_2;\ p_3)$ zu Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ und dem Aufpunkt $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$ (siehe auch Hesse`sche Normalenform):

$$d(P;E) = \left|\frac{n_1\cdot p_1 + n_2\cdot p_2 + n_3\cdot p_3 - d}{|\vec{n}|}\right|,\quad wobei{:}\ d = \vec{n}\circ\vec{a}$$

d) Berührt eine Gerade g eine Kugel K mit dem Radius $r_{Kugel}$ im Punkt A, so gilt: $\left|\overrightarrow{AM}\right| = r_{Kugel}$

e) Kriterium für die Existenz eines Umkreises bei einem Vierecke: Gegenüberliegende Winkel ergänzen sich zu 180° (hier mit Hilfe des Satzes von Thales auch einfach zu begründen!).

f) ---