2019 - Analysis - Teil A - Aufgabengruppe 2

1. $g(x) = \sqrt{x+1} - 2$

   a) D_{max} -> $x + 1 \geq 0$ -> $x \geq -1$ -> $D_{max} = [-1; \infty[$

   b) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ 1 $\qquad T(x) = mx + t$

   $m = g'(8) = \frac{1}{6}, \quad g(8) = 1 \quad$ -> $\quad 1 = \frac{1}{6} \cdot 8 + t$ -> $\quad t = -\frac{1}{3}$

   --> $T(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$ $\qquad$ (alternativ mit Tangentenformel)

2. $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

   a) $f(x) = g(x)$ -> $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = -3$ $\qquad$ qed

   b) Rechteck $1 \cdot 3 +$ 2 mal Integral von 0,5 bis 1 von f

   $$A = 3 + 2 \cdot \left| \int_{0,5}^{1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \right| = 3 + 2 \left| \left[x + \frac{1}{x}\right]_{0,5}^{1} \right| = 3 + 2|2 - 2,5| = 4$$

3. $p_k(x) = kx^2 - 4x - 3$

   Einh.: 1

   a) $-3 = k \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 3$ -> $k = 2$

   b) Nullstellen in Abhängigkeit von k -> $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12k}}{2k}$

   keine Nullstelle -> $16 + 12k < 0 \rightarrow k < -\frac{4}{3}$

4. Graphen

   a) II nicht möglich, da Extrema bei -2 und 2 --> müsste f′ eine Nullstelle haben
   III nicht möglich, da die Steigung von f im Ursprung sicher größer als -1 ist
   also ist der zugehörige Graph I

   b) streng monoton fallend, da $f(x) < 0$ in diesem Bereich.

2019 - Analysis - Teil ~~A~~ B - Aufgabengruppe 2

1. $f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$

a) $f(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

$x = -1$ Nullstelle des Nenners --> senkrechte Asymptote

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x + 2 + \frac{1}{x}} = 0$$

bzw. Zählergrad < Nennergrad als Begründung für 0

--> $y = 0$ ist waagrechte Asysmptote

b) $f'(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot 4 - 4x \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) \cdot 4 - 8x}{(x+1)^3} = \frac{-4x+4}{(x+1)^3}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x + 4 = 0 \;\rightarrow\; x = 1 \;\rightarrow\; f(1) = 1 \;\rightarrow\; P(1|1)$

$f'(0) > 0$ $\quad f'(2) < 0$ $\quad$ --> P ist ein Maximum.

c) $f(-3) = -3$ $\quad f(-0{,}25) = -1{,}\overline{7}$ $\quad f(-5) = -1{,}25$ $\quad f(-6) = -0{,}96$

$f(-3) < 0$ links der senkrechten Asymptote

$f(-0{,}5) < 0$ rechts der senkrechten Asymptote

nur eine Nullstelle bei $x = 0$ mit Vorzeichenwechsel

--> Graph nur im III. Quadranten

Beg.

Zeichnen:

d) $F(x) = 4\ln(x+1) + \frac{4}{x+1}$

$$F'(x) = \frac{4}{x+1} + \frac{-4}{(x+1)^2} = \frac{4(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2} = f(x)$$

e) x ist die Zeit in Stunden

$f(x)$ ist dieWirkstoffkonzentration in $\frac{mg}{l}$

$f(0{,}5) = \frac{8}{9}\frac{mg}{l}$ $\quad f(1) = 1\frac{mg}{l}$ $\quad$ $\underline{f(30) = 0}$

f) $x = 2$ ist Wendepunkt.

2. Ableitung von $f(x)$ erstellen, $x = 2$ muss dann Nullstelle mit Vorzeichenwechsel sein. Im Sachzusammenhang bedeutet das, dass nach zwei Stunden die Abnahme/Änderung der Wirkstoffkonzentration am größten/stärksten ist.

...wahlweise alternative Textvorschläge...

g) $\int_0^b f(x)\,dx = \left[4\ln(x+1) + \frac{4}{x+1}\right]_0^b = 4\ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - (4\ln(1) + 4) = 4\ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - 4$

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty}\left(4\ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - 4\right) = \infty$$

--> keine realistische Modellierung ✗

h) $f(x) = 0{,}75$ --> $\frac{4x}{(x+1)^2} = 0{,}75$ ✓ -->

$$4x = 0{,}75(x^2 + 2x + 1) \rightarrow \quad 0 = 0{,}75x^2 + 1{,}5x + 0{,}75 - 4x \rightarrow \quad 0$$
$$= 0{,}75x^2 - 2{,}5x + 0{,}75$$ ✓
$$x_{1,2} = \frac{2{,}5 \pm \sqrt{(-2{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75}}{1{,}5} \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2{,}5 \pm 2}{1{,}5} \rightarrow$$

✓ $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$ (x_2 liegt noch im Anstiegsbereich und scheidet deshalb aus)

--> nach spätestens 3 Stunden muss die 2. Tablette eingenommen werden.

✓

i) Term B $f(x) + f(x - 2{,}5)$

- Addition der Konzentrationen (D fällt weg)
- Konzentration durch die Funktion $f(x)$ (1. Tablette zum Zeitpunkt $x = 0$) muss zu der Konzentration durch die Funktion $f(x - 2{,}5)$ (2. Tablette eingenommen zum Zeitpunkt $x = 2{,}5$, also 2,5 nach recht verschoben) addiert werden.

...oder alternative Textvorschläge...

j) $k(x) = \frac{3e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1{,}5$ --> QR: 1 KR: 1 ZF: 1

$$k'(x) = \frac{(e^{2x} + 1) \cdot 6e^{2x} - 3e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{6e^{4x} + 6e^{2x} - 6e^{4x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{6e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

Zähler ist immer größer 0, Nenner ist immer größer 0 --> Ableitung ist immer positiv --> Funktion ist streng monoton steigend. ✓

k) $k(1) = 1{,}14 \frac{mg}{l}$ ✓ $> 0{,}75 \frac{mg}{l}$ ✗

$$\lim_{x\to\infty} k(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 1{,}5 \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} - 1{,}5 = 1{,}5$$ ✓✓

✓ Da G_k streng monoton steigend und 25% unter $2 \frac{mg}{l}$ den $1{,}5 \frac{mg}{l}$ für $x \rightarrow \infty$ entspricht, ist die Bedingung erfüllt. ✗

Mathematik-Abitur 2019 – Stochastik 2

Teil A:

1. Glücksrad mit fünf Sektoren {0,1,2,9,9}
   a) 4-maliges Drehen
   $$P(2019) = \underbrace{\frac{1}{5}}_{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{9} = \frac{2}{625} = 0{,}32\%$$
   b) 2-maliges Drehen
   $$P(\text{Summe} \geq 11) = \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5}}_{2,9} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}}_{9,2} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}}_{9,9} = \frac{8}{25} = 32\%$$

2. Säule für $P(X \leq 5)$ mit Höhe 1
   $P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) \approx 0{,}42 - 0{,}15 = 0{,}27 \approx 0{,}3$

3. Baumdiagramm
   $\frac{2}{3} \cdot P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{15} \Rightarrow P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{5}$
   Möglichkeit 1: stoch. Unabh. $\Rightarrow P(B) = P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{5}$
   Möglichkeit 2: $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ und $P(B) = P(A \cap B) + (\bar{A} \cap B) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$

Teil B:

1. Volksfestbesuch, $n = 25, p = \frac{1}{6}$, X: Anzahl der Lebkuchenherz-Träger
   a) $P(X \leq 1) \approx 6{,}29\%$ (aus TW)

   b) $\sum_{i=5}^{8} B\left(25; \frac{1}{6}; i\right) = P(5 \leq X \leq 8)$
   Mindestens 5 und höchstens 8 der 25 Besucher tragen ein Lebkuchenherz
   c) $E(X) = \mu = n \cdot p = \frac{25}{6} = 4{,}1\overline{6}$
   $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{125/36} \approx 1{,}86$
   $P\left(\underbrace{\mu - \sigma}_{\approx 2{,}3} \leq X \leq \underbrace{\mu + \sigma}_{\approx 6{,}03}\right) = P(x \leq 6) - P(X \leq 2) \approx 89{,}07\% - 18{,}86\% \approx 70{,}2\%$

2. Losbude

Los	„Donau“	„Main“	„Lech“
X: Reingewinn in €	-7	-1	$0{,}8$
P(X=..)	p	$4p$	$1-5p$

$E(X) = -7p - 4p + 0{,}8(1 - 5p) = 0{,}35$
$-15p = -0{,}45$
$p = 0{,}03$

3. Überprüfung der Angestellten
   a) Hypothesentest
   $H_0: p \geq 0{,}15$, $n = 100$
   $A = \{k+1, \dots, 100\}, \bar{A} = \{0, \dots, k\}$
   $\alpha = P_{0,15}^{100}(X \leq k) \leq 10\%$
   $TW \Rightarrow k \leq 10$
   Ablehnungsbereich $\{0, \dots, 10\}$

   b) Behauptung
   L: Person kauft Los, K: Person mit Kind

	K	$\overline{K}$	
L	4	6	**10**
$\overline{L}$	36	**54**	90
	40	60	**100**

$P_K(L) = \frac{4}{40} = 10\%$
Dies ist nicht größer als 10% → Behauptung widerlegt!

Zu Aufgabe 1:

a)

$$d = \vec{a} + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow D(0/-4/-3)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a} + \vec{c}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow M\left(5/2 / 0 / 0\right)$$

b) Es gilt: M halbiert die Strecke [AC]. Die Höhe beider Dreiecke ist die kürzeste Entfernung von B zur Strecke [AC]. Wegen gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind damit insbesondere auch die Flächeninhalte gleich!

Zu Aufgabe 2:

a) $3 \cdot a + 2 \cdot a + 2 \cdot a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{7} \rightarrow P\left(\frac{6}{7}; \frac{6}{7}; \frac{6}{7}\right) \in E$

b) Alle Koordinaten sind gleich bedeutet: Die Punkte liegen auf einer Geraden mit der Gleichung: $\overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da es unendlich viele Ebenen gibt, die die Gerade nicht enthalten, ist die Aussage wahr!

Zu a)

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| + \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}\right| = 1 + \sqrt{8{,}25} = 3{,}872 \quad \rightarrow l_{Bohrkanal} = 3872\,m$$

Zu b)

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{AP}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right|} \rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{2{,}5}{\sqrt{8{,}25}}\right) = 29{,}5°$$

Zu c)

$\overrightarrow{PQ}$ ist der Normalenvektor von E $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}\right] = 0$ (bei fehlen $-\frac{1}{2}$)

$$x_1 + x_2 - \frac{5}{2} \cdot x_3 - 10{,}75 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 10 \cdot x_3 - 43 = 0$$

Zu d)

$$g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ -3{,}6 \end{pmatrix} \rightarrow -1 - 2{,}5 \cdot \mu = -3{,}6 \Rightarrow \mu = \frac{26}{25} = \frac{104}{100} = 1{,}04$$

$$\rightarrow R(1{,}04; 1{,}04; -3{,}6)$$

$$Schichtdicke: \left|\overrightarrow{RQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} -0{,}04 \\ -0{,}04 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}0132} = 0{,}115 \rightarrow d_{Schicht} = 115m$$

Zu e)

Hilfsgerade t mit $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ x_3 \end{pmatrix}$ in E: $4 \cdot t - 4 \cdot t - 10 \cdot x_3 - 43 = 0 \rightarrow x_3 = -4{,}3$

Das Ergebnis ist unabhängig von t, deshalb beeinflusst die Lage der Bohrstelle die Länge des Bohrkanals nicht!

Zu f)

$\left|\overrightarrow{TQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 0{,}8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(1-t)^2 + (1+t)^2 + 0{,}64} = \sqrt{2 \cdot t^2 + 2{,}64}$ ist minimal, wenn t = 0.

Wegen:
$\sqrt{2{,}64} > \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ (entspricht 1500 m) erfüllt jeder alternative zweite Bohrkanal die Abstandsbedingung!