Mathematik

Abiturprüfung 2016

Teil A

Nicht gewählte Teile

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

3 **a)** Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an und bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

4 **b)** Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punkts, in dem der Graph von f eine waagrechte Tangente hat.

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ mit $ID_f = IR^+$ und Nullstelle $x = 1$

b) $f'(x) = \frac{x - 2 \cdot x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 1 - 2 \cdot \ln x = 0 \rightarrow x = \sqrt{e}$

2 Geben Sie jeweils den Term und den Definitionsbereich einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

2 **a)** Der Punkt $(2|0)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von g.

2 **b)** Der Graph der Funktion h ist streng monoton fallend und rechtsgekrümmt.

a) $h(x) = (x-2)^3$ mit $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$

b) $k(x) = -e^x$ mit $\mathbb{D}_k = \mathbb{R}$

3 Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

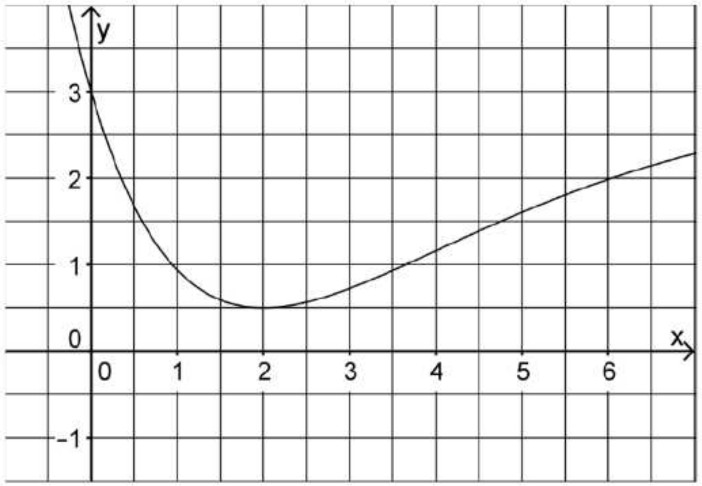


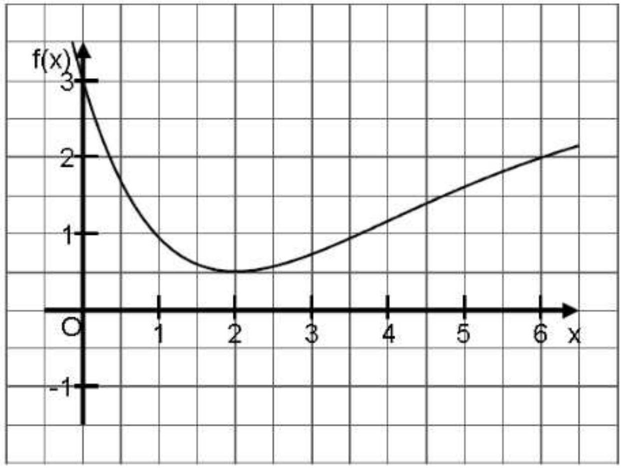
Abb. 1

2 **a)** Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 1 einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)\,dx$.

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

1 **b)** Geben Sie mithilfe von Abbildung 1 einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ an.

2 **c)** Zeigen Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x)\,dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.



Bemerkung:

G_f gehört zur Funktionsvorschrift:

$$f: x \mapsto -\frac{5}{4} \cdot x \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} \cdot x+1\right)} + 3$$

a) Mit Hilfe einer Kästchenzählung (vier Kästchen entsprechen einer Flächeneinheit) erhält man näherungsweise: $\int_3^5 f(x)dx \approx \frac{9}{4}\,[FE] = 2{,}25\,[FE]$

Bemerkung: Der exakte Wert ergibt sich aus …

$$\int_3^5 f(x)dx = \left[\frac{5}{4} \cdot (4+2 \cdot x) \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} \cdot x+1\right)} + 3 \cdot x\right]_3^5 = \left[\frac{35}{2} \cdot e^{-\frac{3}{2}} + 15\right] - \left[\frac{25}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} + 9\right] = 2{,}3231456\,[FE]$$

b) Aus dem HDI folgt: $F'(2) = f(2) = \frac{1}{2}$

Bemerkung: Dies entspricht dem exakten Wert!

c) Mit F(3) =0 und dem HDI gilt: $\int_3^b f(x)dx = [F(x)]_3^b = F(b) - \overbrace{F(3)}^{=0} = F(b)$

4 **4** Abbildung 2 zeigt den Graphen G_k einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion k. Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion k'. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere einen Näherungswert für die Steigung des Graphen G_k an dessen Wendepunkt $(0|-3)$ sowie die Nullstelle von k'.

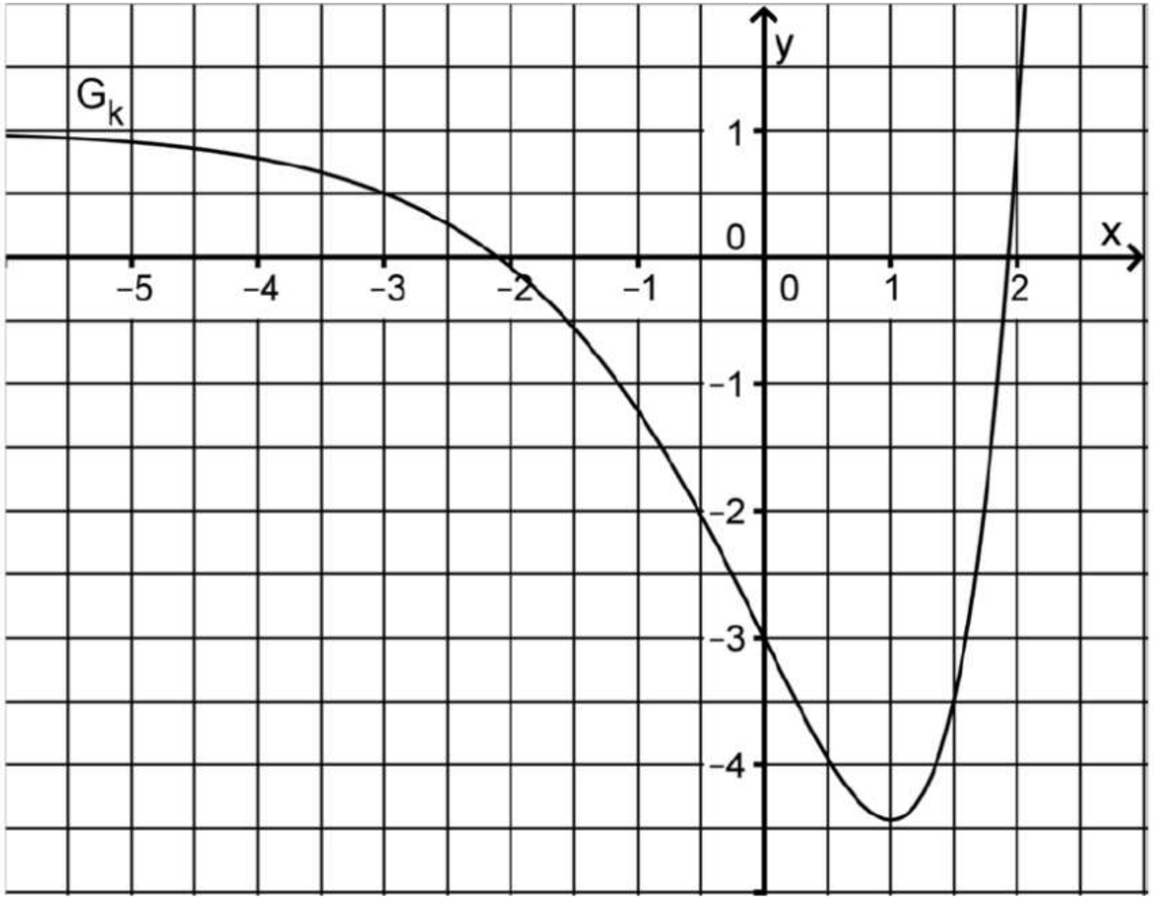
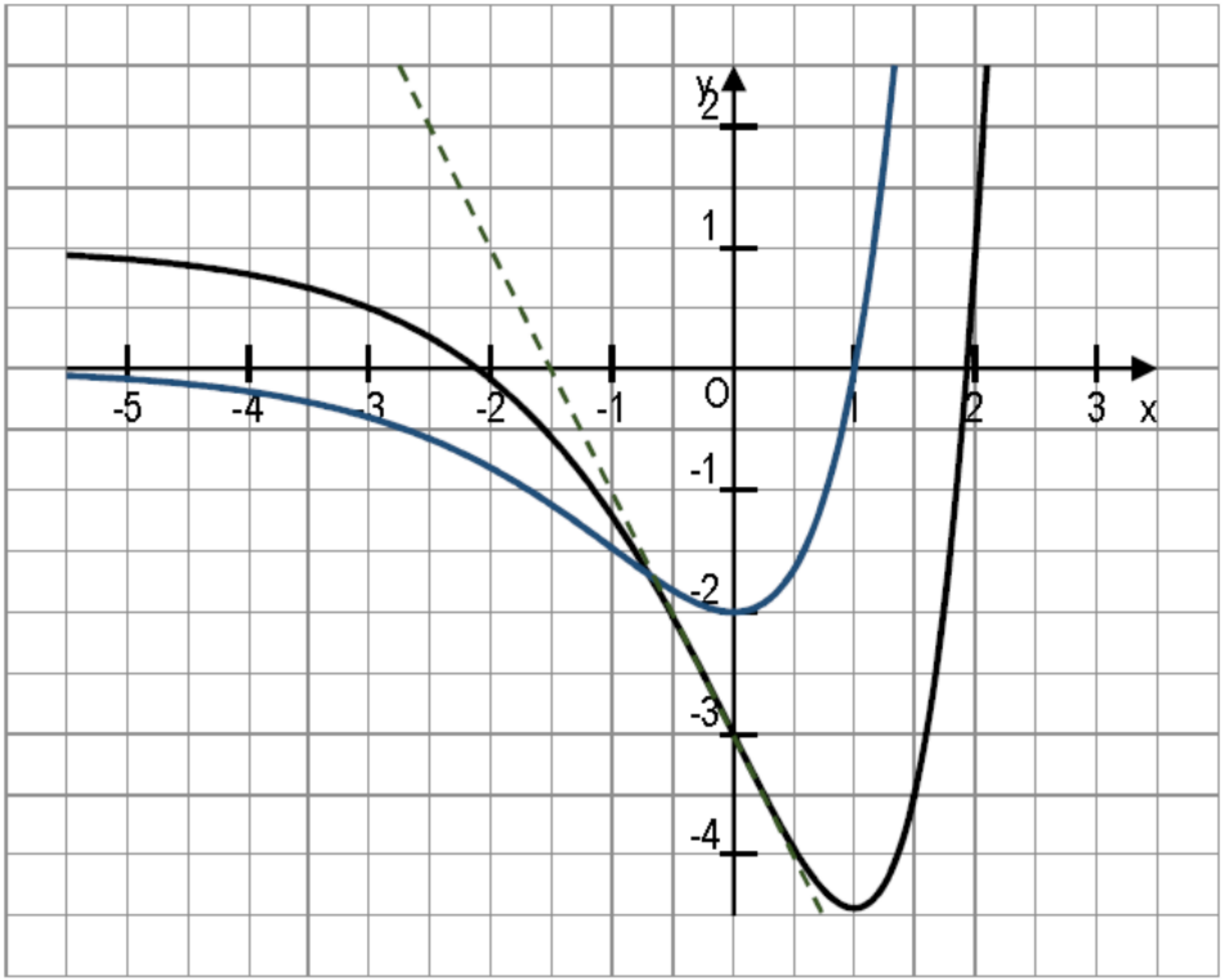


Abb. 2



Bemerkung:
$k(x) = (2x-4)\exp(x)+1$

Stochastik

Aufgabengruppe 2

1 Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt. Als Ergebnismenge wird festgelegt: {ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW}.

2 **a)** Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.

3 **b)** Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

a) Die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse sind **nicht** gleich, damit liegt offensichtlich kein Laplace – Experiment vor!

b) $E(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

2 An einem P-Seminar nehmen acht Mädchen und sechs Jungen teil, darunter Anna und Tobias. Für eine Präsentation wird per Los aus den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein Team aus vier Personen zusammengestellt.

3 **a)** Geben Sie zu jedem der folgenden Ereignisse einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnet werden kann.
A: „Anna und Tobias gehören dem Team an."
B: „Das Team besteht aus gleich vielen Mädchen und Jungen."

2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den folgenden Term berechnet werden kann:

$$\frac{\binom{14}{4}-\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$$

a) $P(A)=\frac{\binom{12}{2}}{\binom{14}{4}}$ und $P(B)=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{14}{4}}$

b) C: „Das Team besteht nur aus Mädchen", denn: $P(C)=\frac{\binom{8}{4}\cdot\binom{6}{0}}{\binom{14}{4}}=1-\frac{\binom{8}{0}\cdot\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$

1 Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$ sowie die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(5|2|6)$.

2 **a)** Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft.

3 **b)** Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F.

a) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} \rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp E$

b) $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{n_F} \rightarrow F: \overrightarrow{n_E} \circ \left(\vec{x} - \underbrace{\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}}_{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}} \right) \rightarrow F:\ 2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 15 = 0$

2 Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

2 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

3 **b)** Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.

II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

a) $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{c} = 2 \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{c} = 3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow C(2/3/0)$

b) $g: \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{AB}} \quad wobei: \left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$

Wähle für die senkrechte Gerade den Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $denn: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Da B bereits 3 LE von A entfernt ist, erfüllt die nachfolgende Gerade h die gestellten Bedingungen:

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad wobei: \left|\overrightarrow{BA}\right| = 3$$