29.4.2016

Abiturprüfung Mathematik

Lösungsgeheft

Peter Dechant
DIENTZENHOFER – GYMNASIUM BAMBERG

Prüfungsteil A

Analysis / Aufgabengruppe 1

Lösungen

Zu Aufgabe 1:

a) $ID_f =]0;+e]$ *wegen* $ID_{\ln x} =]0;+\infty[$ *sowie*

$f: x \mapsto \sqrt{1-\ln x}$

$1-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$

b) $f(x) = \sqrt{1-\ln x} = 2 \Leftrightarrow 1-\ln x = 4 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$

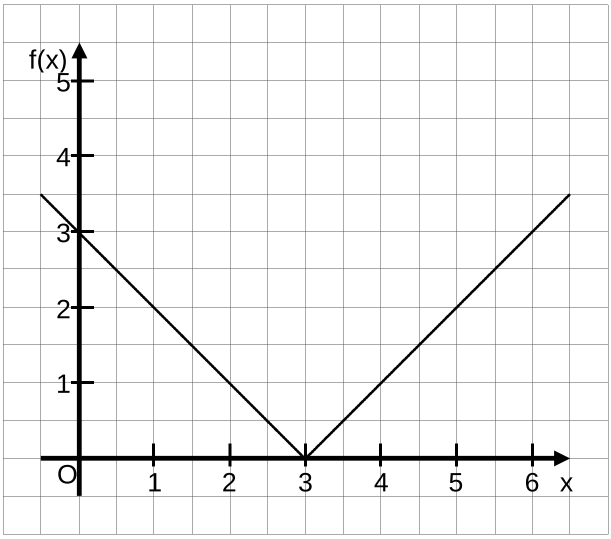
Zu Aufgabe 2:

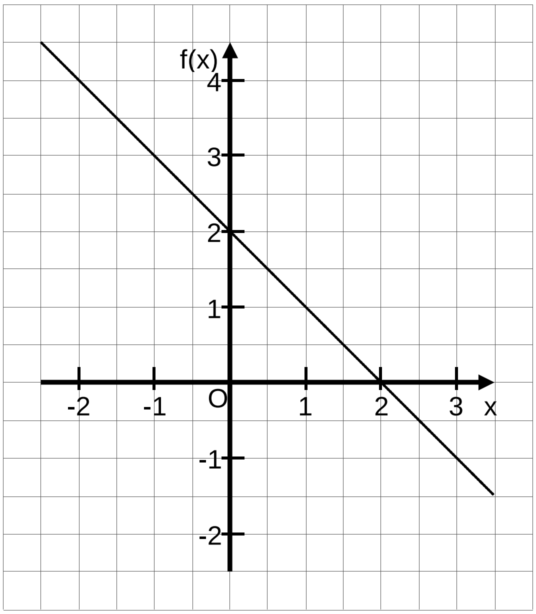
$g: x \mapsto x^2 \cdot \sin x$

Punktsymmetrie folgt aus: $g(-x) = (-x)^2 \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin x} = -x^2 \cdot \sin x = -g(x)$

Aus der Punktsymmetrie folgt sofort: $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left(x^2 \cdot \sin x\right) dx = 0$ (Flächenbilanz bei symmetrischen Integrationsgrenzen einer ps Fkt.).

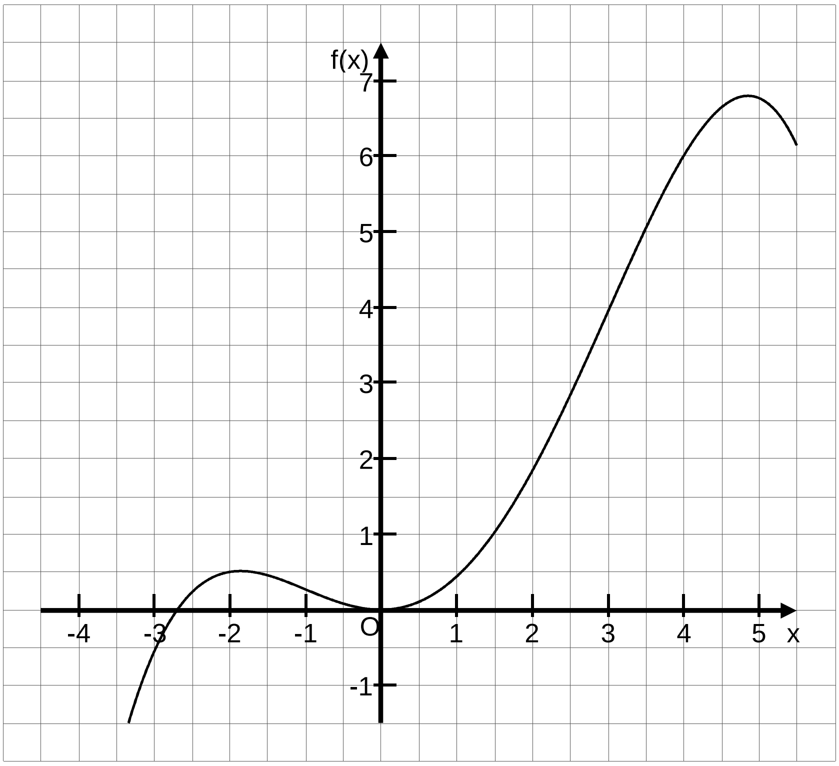
Zu Aufgabe 3:



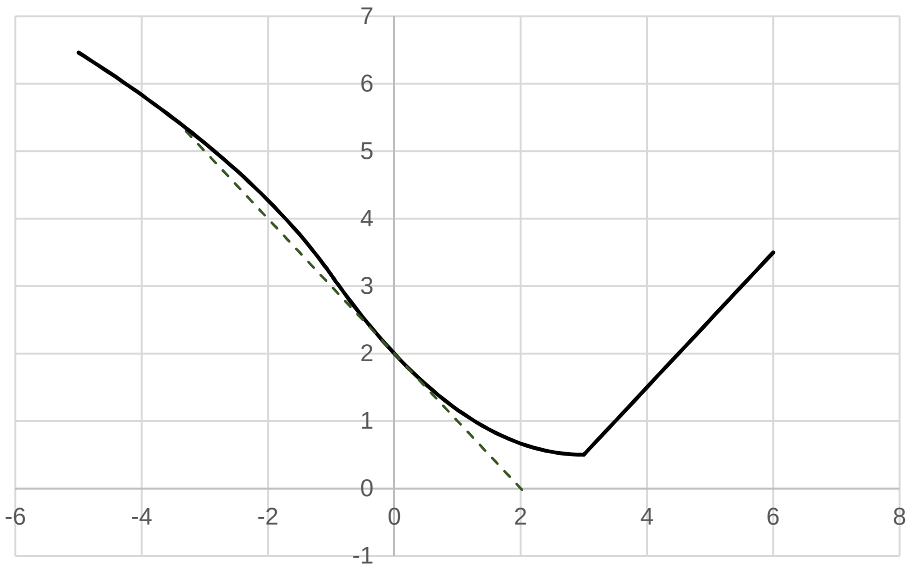


An Stelle x = 3 nicht differenzierbar

$f(0) = 0$ *sowie* $f'(0) = -1$



G_f ist auf -1 < x < 3 linksgekrümmt.



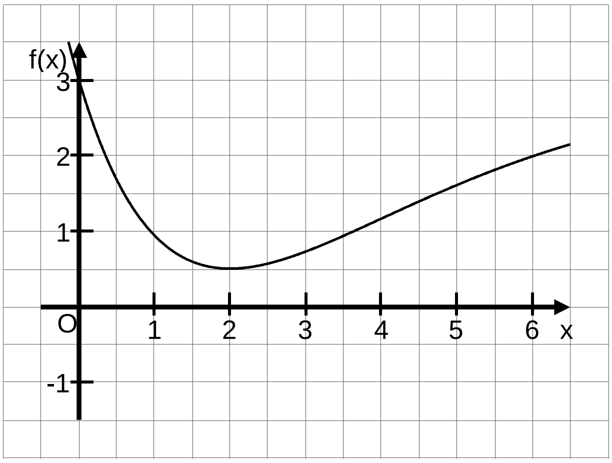
Und dann noch alle drei in einem …

Zu Aufgabe 4:

a) Besitzt der Graph in x = 1 und in x = 4 eine Extremstelle, so ist dort der Wert der Ableitung Null (Nullstelle von $G_{f'}$). Aufgrund der Art der Extremstellen muss der Graph von f zwischen 1 und 4 streng monoton fallen ($G_{f'}$ verläuft unterhalb der x – Achse). Da es sich bei f um eine Funktion dritten Grades handelt, muss f' eine ganzrationale Funktion zweiten Grades sein (Parabel), die nach oben geöffnet ist!

b) Der Scheitelpunkt einer Parabel liegt auf der Symmetrieachse der Parabel (hier x = 2,5). Da der Scheitel die Extremstelle von $G_{f'}$ ist, gilt: Die Ableitungsfunktion von f' (f'') besitzt dort eine Nullstelle. Die Nullstelle der zweiten Ableitung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades liefert jedoch immer die x – Koordinate des Wendepunktes.

Zu Aufgabe 5:



Bemerkung:

G_f gehört zur Funktionsvorschrift:

$$f: x \mapsto -\frac{5}{4} \cdot x \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} \cdot x + 1\right)} + 3$$

a) Mit Hilfe einer Kästchenzählung (vier Kästchen entsprechen einer Flächeneinheit) erhält man näherungsweise: $\int_3^5 f(x)dx \approx \frac{9}{4}\,[FE] = 2{,}25\,[FE]$

Bemerkung: Der exakte Wert ergibt sich aus …

$$\int_3^5 f(x)dx = \left[\frac{5}{4} \cdot (4 + 2 \cdot x) \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} \cdot x + 1\right)} + 3 \cdot x\right]_3^5 = \left[\frac{35}{2} \cdot e^{-\frac{3}{2}} + 15\right] - \left[\frac{25}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} + 9\right] = 2{,}3231456\,[FE]$$

b) Aus dem HDI folgt: $F'(2) = f(2) = \frac{1}{2}$

Bemerkung: Dies entspricht dem exakten Wert!

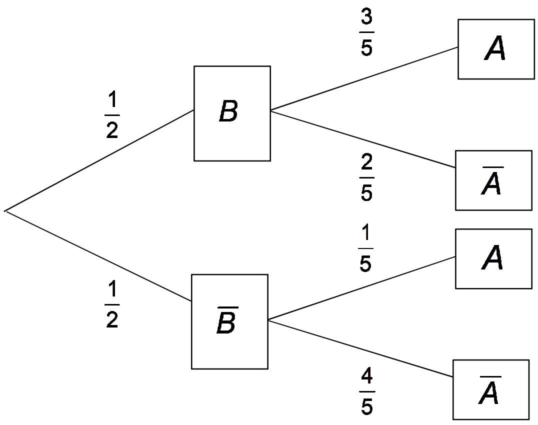
c) Mit F(3) =0 und dem HDI gilt: $\int_3^b f(x)dx = [F(x)]_3^b = F(b) - \overbrace{F(3)}^{=0} = F(b)$

Stochastik / Aufgabengruppe 1

Lösungen

Zu Aufgabe 1:

	A	$\overline{A}$	Σ
B	0,3	0,2	0,5
$\overline{B}$	0,1	0,4	0,5
Σ	0,4	0,6	1



Zu Aufgabe 2:

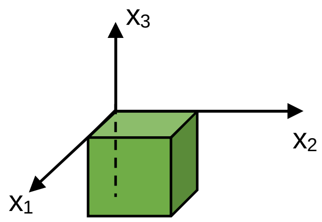
a) Die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse sind **nicht** gleich, damit liegt offensichtlich kein Laplace – Experiment vor!

b) $E(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Geometrie / Aufgabengruppe 1

Lösungen

Zu Aufgabe 1:



a) $A(2/0/-2)$

b) $g: \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{f}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{FB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \cdot \lambda \end{pmatrix}$

$\vec{p} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \cdot p \end{pmatrix} \rightarrow \left|\overrightarrow{HP}\right| = |\vec{p}| = 2 \cdot \sqrt{2 + p^2} = 3 \Leftrightarrow p^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{2} \rightarrow P(2/2/-1)$

Die negative Lösung scheidet aus, da der Punkt P nicht auf der Kante [FB] liegen würde!

Zu Aufgabe 2:

a) $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{c} = 2 \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{c} = 3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow C(2/3/0)$

b) $g: \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{AB}} \quad \textit{wobei}: \left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$

Wähle für die senkrechte Gerade den Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\textit{denn}: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Da B bereits 3 LE von A entfernt ist, erfüllt die nachfolgende Gerade h die gestellten Bedingungen:

$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{wobei}: \left|\overrightarrow{BA}\right| = 3$

Prüfungsteil B

Analysis / Aufgabengruppe 1

Lösungen

Zu Aufgabe 1:

a) $f(x)=e^{\frac{1}{2}\cdot x}+e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$

$f(0)=e^{\frac{1}{2}\cdot 0}+e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}=2\rightarrow S_y(0/2)$

Es gilt: $f(x)=\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{>0}+\overbrace{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}^{>0}>0$ für alle x $\in$ IR

b) Wegen $f(-x)=e^{\frac{1}{2}\cdot(-x)}+e^{-\frac{1}{2}\cdot(-x)}=e^{\frac{1}{2}\cdot x}+e^{-\frac{1}{2}\cdot x}=f(x)$ ist G_f achsensymmetrisch zur y – Achse und damit:

$$\lim_{x\rightarrow\pm\infty} f(x)=\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\left(e^{\frac{1}{2}\cdot x}+e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\right)=+\infty$$

c) Die Linkskrümmung folgt mit Hilfe der Beziehung bereits aus Teilaufgabe a)

$f(x)=e^{\frac{1}{2}\cdot x}+e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$

$\rightarrow f''(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}=\frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot x}+e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\right)=\frac{1}{4}\cdot f(x)$

d) $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot x}-e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\right)=0\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}\cdot x}=e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\Leftrightarrow x=0$, d.h. S_y ist globales Minimum (siehe Grenzwertverhalten in b) und Krümmungsverhalten in c))

Die Aussage folgt aber bereits aus der Achsensymmetrie von G_f sowie den Grenzwerten!

e) $f'(2)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{1}-e^{-1}\right)=1{,}2$ (Zeichnung siehe nächste Seite)

f) $f(4)=\left(e^{2}+e^{-2}\right)=7{,}52$ (Zeichnung siehe nächste Seite)

g) Nachweis der Beziehung:

$$\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2-[f'(x)]^2=\frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot x}+e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot x}-e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\right)^2=$$

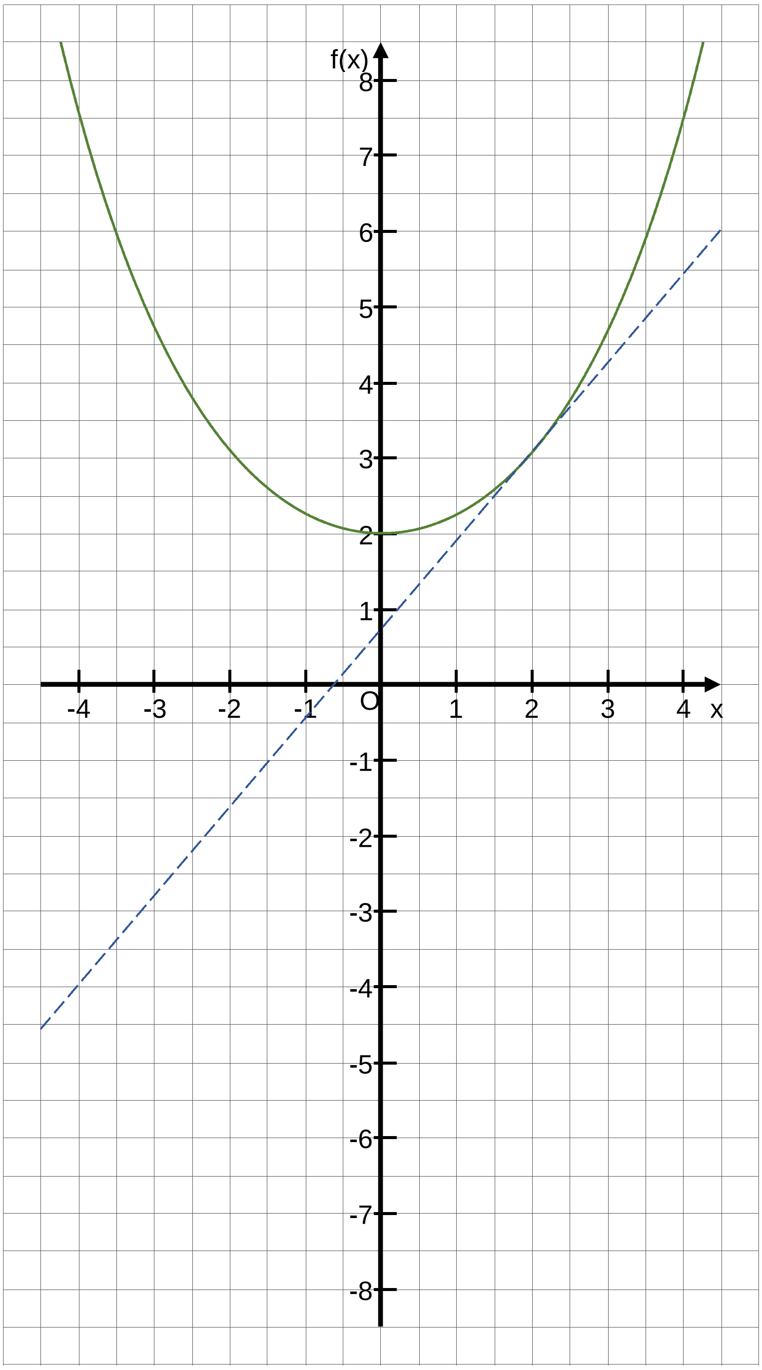
$$\frac{1}{4}\cdot\left(e^{x}+2+e^{-x}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(e^{x}-2+e^{-x}\right)=\frac{1}{4}\cdot e^{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot e^{-x}-\frac{1}{4}\cdot e^{x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot e^{-x}=1$$

h) Aus: $\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2-[f'(x)]^2=1\rightarrow[f'(x)]^2=\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2-1$ und damit:

$$L_{a;b}=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

$$L_{0;b}=\frac{1}{2}\cdot\int_0^b\left(e^{\frac{1}{2}\cdot x}+e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\left[2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}-2\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^b=e^{\frac{1}{2}\cdot b}-e^{-\frac{1}{2}\cdot b}$$

Zeichnungen:



Zu Aufgabe 2:

a) Der Durchhang berechnet sich mit f(4) – f(0): $f(4)-f(0)=7{,}52m-2m=5m\ 52cm$

b) Zum Winkel: $\varphi=90°-\mathbf{arctan}[f'(4)]=90°-\mathbf{arctan}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\right]=15{,}41°$

$L_{-4;4}=2\cdot L_{0;4}=2\cdot\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)=14m\ 51cm$

c) $q(x)=a\cdot x^2+2\ \ mit:\ \ q(4)=f(4)=\left(e^2+\frac{1}{e^2}\right)=a\cdot 16+2\Leftrightarrow a=\frac{1}{16}\cdot\left(e^2+\frac{1}{e^2}-2\right)$

$\rightarrow q(x)=\frac{1}{16}\cdot\left(e^2+\frac{1}{e^2}-2\right)\cdot x^2+2$

d) Die Differenzfunktion $d(x)=q(x)-f(x)$ liefert den vertikalen Abstand beider Funktionsgraphen. Setzt man die Ableitung von $d(x)$ gleich Null, ergeben sich drei Nullstellen im Intervall [0; 4]. Der x – Wert mit 0 < x < 4 liefert dann den maximalen Abstand (is ja klaro, wegen d(0) = d(4) = 0 und d(x) > 0 auf]0; 4[).

Stochastik / Aufgabengruppe 1

Lösungen

Zu Aufgabe 1:

a) $P(A)=\frac{10^5}{2\cdot 10^6}=\frac{1}{20}=0{,}05;\quad P(B)=\frac{10^5-12\cdot 10^3}{2\cdot 10^6}=\frac{88}{2\cdot 10^3}=\frac{44}{1000}=0{,}044;$

b) Bei großen Stückzahlen (> 500) wird die hypergeometrische Reihe ausgezeichnet durch die Binomialverteilung approximiert!

c) $P_{10}=0{,}95^4\cdot 0{,}05\cdot 1^5=0{,}0407=4{,}1\%$

d) Gesucht ist $B(n;0{,}05;k\geq 2)>0{,}05 \Leftrightarrow 1-B(n;0{,}05;k\leq 1)>0{,}05 \Leftrightarrow B(n;0{,}05;k\leq 1)<0{,}95$
$\rightarrow n=8$
Oder:
$0{,}95^n+n\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^{n-1}<0{,}95 \Leftrightarrow (0{,}95+n\cdot 0{,}05)\cdot 0{,}95^{n-2}<1$
Mit der Wertetabellenfunktion des Taschenrechners ergibt sich ebenfalls: n = 8.

e) $E(X)=20\cdot(0{,}95\cdot 0+0{,}044\cdot 1+0{,}006\cdot 5)=1{,}48$ [€]
Pro Kasten können die Kunden mit einem Gesamtgewinn von 1,48 € rechnen!

Zu Aufgabe 2:

H_0 : "$p\geq 0{,}05$" $\quad A_0=\{k+1,\ldots,200\}$
H_1 : "$p<0{,}05$" $\quad A_1=\{0,\ldots k\}$
$B(200;0{,}05;0\leq k_0\leq k)\leq 0{,}01 \xrightarrow{TW} k=3$

Bei weniger als vier Flaschen mit Gutschein darf die Nullhypothese guten Gewissens (wenn auch zu Unrecht) abgelehnt werden.

$B(200;0{,}03;4\leq k_0\leq 200)=1-B(200;0{,}03;0\leq k_0\leq 3)=1-0{,}147151=85{,}28\%$

Der Getränkemarkt kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von 85,28% nicht in den Genuss der Sonderwerbeaktion.

Geometrie / Aufgabengruppe 1

Lösungen

Zu Aufgabe 1:

a) $E: \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{AB}} + \mu \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{AC}} \quad \vec{n}_E = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9-0\\-(-9)\\0-(-9)\end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$NF_E: \vec{n}_E \circ \left[\vec{X} - \vec{a}\right] = 0 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix}\right] = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$$

b) Aus der Orthogonalität der Vektoren $\overrightarrow{ZC} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ZA} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ZB} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ folgt sofort, dass die Strecke [CC`] der Normalenvektor der Ebene ist, die die Punkte A, B und Z enthält und damit insbesondere, dass die angegebene Strecke senkrecht auf der Ebene steht! Damit ist aber auch klar, dass die Ebene ABZ eine Parallelebene zur x_1x_2 – Ebene sein muss!

c) [AA`] und [BB`] scheiden sich im Punkt Z und werden von diesem halbiert (Symmetrieeigenschaft). Sie bilden also die Diagonalen eines Vierecks. Dass dieses Viereck ABA`B` ein Quadrat bildet ist sofort klar, da aus Teilaufgabe b) folgt:

$$\overline{AA'} = 2 \cdot \left|\overrightarrow{ZA}\right| = 6 \ \textit{und} \ \overline{BB'} = 2 \cdot \left|\overrightarrow{ZB}\right| = 6 \ \textit{sowie} \ [AA'] \perp [BB']$$

Insbesondere ergibt sich die Seitenlänge dieses Quadrates durch den Satz des Pythagoras zu:

$$\overline{AB}^2 = \left|\overrightarrow{ZA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{ZB}\right|^2 = 18 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

d) $V_O = \frac{1}{3} \cdot G \cdot \overline{CC'} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot \overline{CC'} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36\ [VE] \ \textit{wegen}: \overline{CC'} = 2 \cdot \left|\overrightarrow{ZC}\right|$

e) Die Größe des Winkels ergibt sich aus dem Neigungswinkel der Seitenfläche ABC zur Quadratfläche ABA`B` (beachte, dass mit dem Mittelpunkt M der Kante AB, dem Punkt Z sowie dem Punkt C ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden kann, dessen Katheten bekannt sind). Es gilt:

$$\varphi = 2 \cdot \angle CMZ = 2 \cdot \mathbf{arctan} \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZM}} \rightarrow \varphi = 2 \cdot \mathbf{arctan} \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}/2} = 2 \cdot \mathbf{arctan}\sqrt{2} = 109{,}47°$$

f) $K: \left|\vec{X} - \underbrace{\vec{m}}_{M=Z}\right|^2 = \underbrace{\overline{ZC}}_{=r}{}^2 \Rightarrow K: \left|\vec{X} - \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right|^2 = 9$ Für den Anteil gilt:

$$A = \frac{V_O}{V_K} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot \overline{CC'}}{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}\underbrace{\overline{ZA}}_{=r}{}^2 \cdot 2 \cdot \underbrace{\overline{ZC'}}_{=r}}{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = \frac{\frac{4}{3} \cdot r^3}{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}31831 \approx 31{,}83\%$$