Prüfungsteil A:

Analysis / Aufgabengruppe 1

1.

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

$$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e \rightarrow E(e/e)$$

E ist globales Minimum der Funktion (das sieht man / Vorzeichenüberlegung).

2.

a)

$$f(x)=e^x\cdot\left(2\cdot x+x^2\right)=0$$

$$\rightarrow 2\cdot x+x^2=x\cdot(2+x)=0\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-2\end{cases}$$

b)

$$F(x)=x^2\cdot e^x$$

$$F'(x)=2\cdot x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=\left(2\cdot x+x^2\right)\cdot e^x=f(x)$$

$$G(1)=F(1)+C=1^2\cdot e^1+C=2\cdot e\Leftrightarrow C=e\Rightarrow G(x)=x^2\cdot e^x+e$$

3.

a)

$$\alpha)\ \ g_{1,1}(x)=\sin x+1$$

$$\beta)\ \ g_{2,0}(x)=\sin(2\cdot x)$$

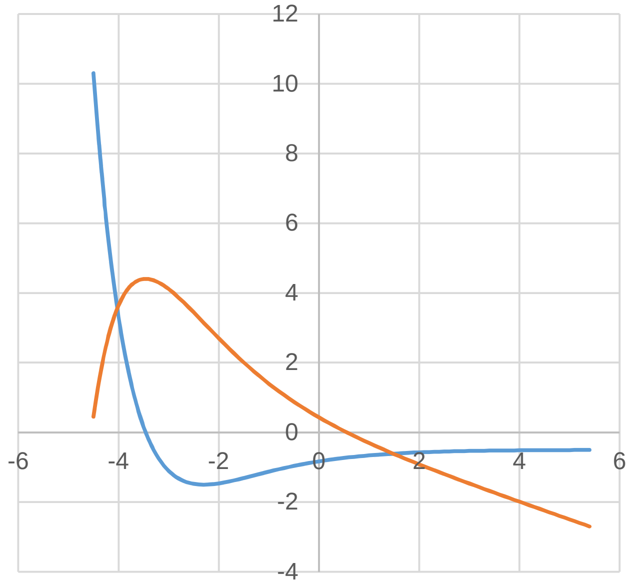
b)

$$g'_{a,c}=a\cdot\cos(a\cdot x)\quad W_{g'_{a,c}}=[-a/+a]$$

4.

a) Der Graph der Stammfunktion von a bis zur Nullstelle der Ableitung zunächst streng monoton steigend, erreicht in der Nullstelle dann ein Maximum und fällt danach bis b streng monoton (Vorzeichen der ersten Ableitung)!

b)



Analysis / Aufgabengruppe 2

1.

a) $g(x)=\sin(-x)=-\sin x$

b) $h(x)=\sin x+2$

c) $k(x)=\sin(2\cdot x)$

2.

a)

$$f(x)=e^x\cdot\left(2\cdot x+x^2\right)=0$$

$$\rightarrow 2\cdot x+x^2=x\cdot(2+x)=0\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-2\end{cases}$$

b)

$$F(x)=x^2\cdot e^x$$

$$F'(x)=2\cdot x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=\left(2\cdot x+x^2\right)\cdot e^x=f(x)$$

$$G(1)=F(1)+C=1^2\cdot e^1+C=2\cdot e\Leftrightarrow C=e\Rightarrow G(x)=x^2\cdot e^x+e$$

3.

Nur der erste Graph besitzt im angegebenen Intervall zwei Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel!

4.

$$A_R=a\cdot b=x\cdot f(x)\qquad mit: f(x)=-\ln x$$

$$\rightarrow A_R=-x\cdot\ln x$$

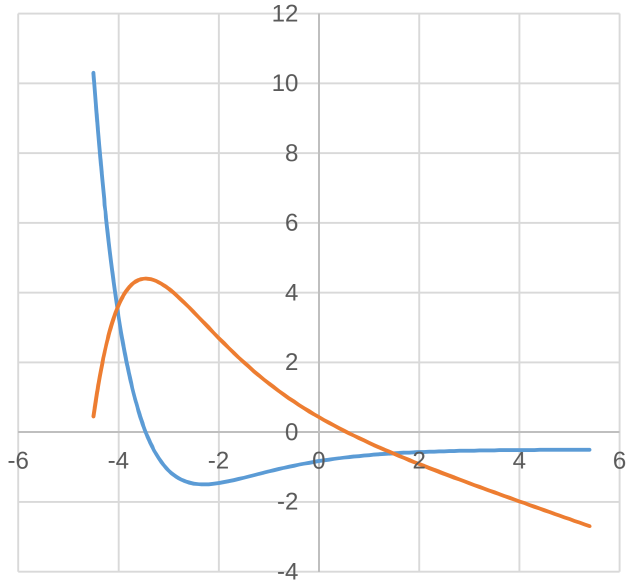
$$\rightarrow A_R'=-\ln x-1=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}\Rightarrow P\left(\frac{1}{e}/1\right)$$

Die Seitenlängen sind wie die Punktkoordinaten!

5.

a) Der Graph der Stammfunktion von a bis zur Nullstelle der Ableitung zunächst streng monoton steigend, erreicht in der Nullstelle dann ein Maximum und fällt danach bis b streng monoton (Vorzeichen der ersten Ableitung)!

b)



Stochastik / Aufgabengruppe 1:

1.

a) Inhalt von A: (r,r,w,w,w); (r,r,r,w,w); (r,w,w,w,w);

b) Wahrscheinlichkeiten:

$P(E) = P(w_A,w_B) + P(r_A,r_B) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{17}{30}$

$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = \frac{13}{30}$

$P(E) > P(\overline{E})$

2.

Ereignis: Es werden genau 19 Treffer oder genau 20 Treffer erzielt, kurz:
E: „Es werden mindestens 19 Treffer erzielt“

3.

$$E(X)=\sum_{k=0}^{3}k\cdot P(X=k)=0\cdot p_1+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot p_2 \qquad \textit{mit}\textbf{:}\ p_1,p_2\in[0;1]$$

$$\textit{Wähle}\textbf{:}\ p_1=0\Rightarrow p_2=1-\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow E_{\mathbf{max}}(X)=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{22}{10}=2{,}2$$

da sich für diese Wahl der maximale Erwartungswert ergibt (Verlustbeitrag von p_1 wird minimiert)!

Stochastik / Aufgabengruppe 2:

1.

a) Inhalt von A: (r,r,w,w,w); (r,r,r,w,w); (r,w,w,w,w);

b) Wahrscheinlichkeiten:

$P(E) = P(w_A, w_B) + P(r_A, r_B) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{17}{30}$

$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = \frac{13}{30}$

$P(E) > P(\overline{E})$

2.

a) Vierfeldertafel:

	C	$\overline{C}$	Σ
D	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{D}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{2}$
Σ	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Mit: $P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)} \Rightarrow P(C)=\frac{P(C\cap D)}{P_C(D)} \to P(C)=\frac{2/5}{3/5}=\frac{2}{3}$

b) Folgt aus: $P(C)\cdot P(D)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\neq\frac{2}{5}=P(C\cap D)$

c) Vierfeldertafel:

	C	$\overline{C}$	Σ
D	$\frac{2}{5}$	x	$\frac{2}{5}+x$
$\overline{D}$			$\frac{3}{5}-x$
Σ	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)} \Rightarrow P(C)=\frac{P(C\cap D)}{P_C(D)} \to P(C)=\frac{2/5}{3/5}=\frac{2}{3}$

$P(C)\cdot\left(\frac{2}{5}+x\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}+x\right)=\frac{4}{15}+\frac{2}{3}\cdot x=\frac{2}{5} \Leftrightarrow x=\frac{2/15}{2/3}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

Geometrie / Aufgabengruppe 1:

1.

a) Lösung mit Satz des Pythagoras:

$$\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CF}^2 \quad mit: \ \overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2$$
$$\Rightarrow \overline{BF}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{CF}^2 \Rightarrow \overline{BF} = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{CF}^2}$$
$$\rightarrow \overline{BF} = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12 \quad [LE]$$

b) M(0 / 0 / 2); P(4 / 4 / 0);

$$\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{MK} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MK} = 0$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ y_k \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot y_k - 4 = 0 \Leftrightarrow y_k = 1$$

2.

a) Die x_1 – Achse verläuft parallel zur Ebene E.

b) Berechne den Abstand von M zu E:

$$E: 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 5 \quad \left|\vec{n}_E\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{25} = 5$$
$$\rightarrow E_{HNF}: \ \frac{3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 5}{5} = 0$$
$$\rightarrow d(E;Z) = \frac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 - 5}{5} = 5 < 7$$

Die Kugel mit Radius 7 schneidet die Ebene E tatsächlich!

Geometrie / Aufgabengruppe 2:

1.

a) Die Behauptung folgt direkt aus …

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=0\rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-4\\-2\\4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}\Rightarrow -t\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{c}_t$$

b) Quadervolumen in Abhängigkeit von t:

$$V_Q=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}_t\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right|\cdot|t|\left|\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}\right|=|t|\cdot3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}=45\cdot|t|=15$$

$$\Rightarrow t=\pm\frac{15}{45}=\pm\frac{1}{3}$$

2.

a) Ganz einfach …

$g:\vec{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\2\\7\end{pmatrix}}_{\vec{m}}+\lambda\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}}_{(\vec{p}-\vec{m})}$ ergibt für λ = 1 den Punkt P und für λ = -1 den Punkt Q

$$\vec{q}=\begin{pmatrix}-3\\2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\0\\10\end{pmatrix}$$

b) Der Kugelradius ergibt sich aus …

$\left|\underbrace{\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}}_{(\vec{p}-\vec{m})}\right|=\sqrt{49}=7$, dies entspricht dem Abstand des Mittelpunktes von der

x_1x_2 – Ebene $\left(g:\vec{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\2\\\boxed{7}\end{pmatrix}}_{\vec{m}}+\lambda\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}}_{(\vec{p}-\vec{m})}\right)$, d.h. die Kugel berührt diese Ebene!