**Analysis / Aufgabengruppe 2**
(Angaben siehe Angabengeheft)

**Teil 1:**

**1.**

$$f(x)=\frac{2\cdot x+3}{x^2+4\cdot x+3};$$

$$x^2+4\cdot x+3=(x+1)\cdot(x+3)=0\rightarrow ID_{\max}=IR/\{-3;-1\}$$

$$2\cdot x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{-3}{2}\quad\rightarrow N\left(\frac{-3}{2}/0\right)$$

**2.**

a)

$$g(x)=x\cdot e^{-2\cdot x}\rightarrow g'(x)=e^{-2\cdot x}-2\cdot x\cdot e^{-2\cdot x}=(1-2\cdot x)\cdot e^{-2\cdot x}=0$$

$$\Rightarrow 1-2\cdot x=0\rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow Max\left(\frac{1}{2}/\frac{1}{2\cdot e}\right)$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}x\cdot e^{-2\cdot x}=\text{"}-\infty\text{"}$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{-2\cdot x}=0$$

**3.**

a)

1. Spiegelung von (ln x) an x – Achse
2. Verschiebung des Graphen um 3 LE nach oben

b)

$$h(x)=-\ln x+3\qquad h(1)=3=y$$

$$h'(x)=-\frac{1}{x}\Rightarrow m_t=h'(1)=-1$$

$$y=m\cdot x+t\rightarrow 3=-1\cdot 1+t\Rightarrow t=4$$

$$\rightarrow \text{Tangente: } y=-x+4$$

**4.**

a) $$F_a(x):=\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)\Rightarrow F_a(a):=\int_a^a f(t)dt=F(a)-F(a)=0$$

b)

$$f(x)=2\cdot x$$

$$\text{denn: }\int_{-1}^{x}2\cdot t dt=\left[t^2\right]_{-1}^{x}=x^2-1$$

$$N_1(-1/0);\quad N_2(1/0);$$

**Teil 2:**

**1.**

a) Geg.: A(-2/0); B(2/0); C(0/5);
Ges.: Term p(x);
Lsng.:

$$p(x) = a \cdot (x-2) \cdot (x+2) = a \cdot \left(x^2 - 4\right)$$

$$p(0) = 5 = -4 \cdot a \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$$

$$p(x) = -\frac{5}{4} \cdot x^2 + 5$$

b)

$$q(x) = -0{,}11 \cdot x^4 - 0{,}81 \cdot x^2 + 5$$

$$q(-x) = -0{,}11 \cdot (-x)^4 - 0{,}81 \cdot (-x)^2 + 5 = -0{,}11 \cdot x^4 - 0{,}81 \cdot x^2 + 5 = q(x)$$

$$\rightarrow \text{Achsensymmetrie bzgl. der x - Achse}$$

$$q(-2) = -0{,}11 \cdot 16 - 0{,}81 \cdot 4 + 5 = q(+2) = 0 \rightarrow A, B \in G_q$$

$$q'(x) = -0{,}44 \cdot x^3 - 1{,}62 \cdot x = x \cdot \left(-0{,}44 \cdot x^2 - 1{,}62\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad (\text{einzige NS in IR})$$

$$-0{,}44 \cdot x^2 - 1{,}62 = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \sqrt{-\frac{1{,}62}{0{,}44}} \quad \notin IR;$$

c) $G_q$ wird durch den durchgezogenen Graphen dargestellt, weil dieser für größere x – Werte unterhalb des gestrichelten Graphen verläuft. Dies entspricht der Erwartung, dass das Polynom 4. ten Grades steiler abfällt als die Parabel.

d)

$$d(x) = q(x) - p(x) = \left(-0{,}11 \cdot x^4 - 0{,}81 \cdot x^2 + 5\right) - \left(-1{,}25 \cdot x^2 + 5\right)$$

$$d(x) = -0{,}11 \cdot x^4 + 0{,}44 \cdot x^2$$

$$d'(x) = -0{,}44 \cdot x^3 + 0{,}88 \cdot x = -0{,}44 \cdot x \cdot \left(x + \sqrt{2}\right) \cdot \left(x - \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$x_4 = 0; \quad x_5 = \sqrt{2}; \quad x_6 = -\sqrt{2};$$

$$\Rightarrow d_{\max} = -0{,}44 + 0{,}88 = 0{,}44 \quad [LE]$$

e)

$$A = 2 \cdot \int_0^2 q(x) dx = 2 \cdot \left[-\frac{0{,}11}{5} \cdot x^5 - 0{,}27 \cdot x^3 + 5 \cdot x\right]_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{0{,}11}{5} \cdot 2^5 - 0{,}27 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2\right] = 14{,}272 \quad [FE]$$

f) Das doppelte Integral von Null bis zur positiven Nullstelle der Funktionsdifferenz $(q(x)-y)$ liefert den Flächeninhalt des oberen Bereichs. Das folgende Verhältnis liefert die gesuchte Lösung:

$$\frac{2\cdot\int_0^2 (q(x)-y)dx}{2\cdot\int_0^2 q(x)dx-2\cdot\int_0^2 (q(x)-y)dx}$$

**2.**

a) Lösung:

HOP(4 min/74 $\frac{m^3}{\min}$): Hier erreicht der Durchfluss seinen maximalen Wert.

$WEP_1$(2,3 min /40 $\frac{m^3}{\min}$): Hier nimmt der Wasserausfluss am größten zu.

$WEP_2$(5,6 min /59 $\frac{m^3}{\min}$): Hier nimmt der Wasserzufluss am meisten ab.

b) Ablesen:

$$\int_1^4 f(t)dt = A_{ges} = A_R + A_D$$

$$A_{ges} = 3\min\cdot 20\frac{m^3}{\min}+\frac{1}{2}\cdot 3\min\cdot 54\frac{m^3}{\min}=141m^3$$

In den drei Minuten beträgt der Wasserdurchfluss ca. 141 $m^3$.

c) Änderungsraten: $\begin{cases} m_{[2;4]}=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}\approx 20 \\ m_{[2;3]}=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}\approx 28 \end{cases}$

$\lim\limits_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=f'(2)$ ist die momentane Änderungsrate des Wasserdurchflusses zum Zeitpunkt t = 2 min.

**Stochastik / Aufgabengruppe 1**
(Angaben siehe Angabengeheft)

**1.**

| | m | w | |
|---|---|---|---|
| N ≤ 1,5 | 0,1875 | 0,6000 | 0,7875 |
| N > 1,5 | 0,0625 | 0,1500 | 0,2125 |
| | 0,2500 | 0,7500 | 1 |

Der Anteil liegt bei 21,25 % der Bewerberinnen / Bewerber.

2.

a. Der vorliegende Term setzt eine Auswahl mit Zurücklegen voraus. Dies ist hier nicht erfüllbar!

b.

$$P(E) = p = \frac{\binom{20}{10}\cdot\binom{10}{5}}{\binom{30}{15}} = 0{,}300 \approx 30\%$$

3.

a.

$W_1 \in \{0, 1, 2\}$; $W_2 \in \{0, 1, 2\}$;
$Z_1$ : „Werfen von Würfel 1“. $Z_2$ : „Werfen von Würfel 2“.
$Z_{ges}$ : $Z_1 \times Z_2$; $\Omega = W_1 \times W_2$;
E := „genau zwei Aufgaben aus der Mathematik müssen gelöst werden“

$$P(E) = \underbrace{P(0;2)}_{1/3\cdot 1/6} + \underbrace{P(1;1)}_{1/2\cdot 1/2} + \underbrace{P(2;0)}_{1/6\cdot 1/3} = \frac{2}{18} + \frac{1}{4} = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} = \frac{13}{36}$$

b. $E(X) = \frac{1}{3} + \frac{13}{18} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{5}{3}$; wegen …

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(X = x) | $1/9$ | $1/3$ | $13/36$ | $1/6$ | $1/36$ |

c.

$$B(10; 1/9; k=1) = \binom{10}{1}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^1\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^9 = 0{,}385 \approx 38{,}5\%$$

d.

$$B(n; 1/9; k \geq 1) = 1 - B(n; 1/9; k=0) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n > 0{,}90 \Leftrightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^n < 0{,}10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}10}{\ln(8/9)} = 19{,}55 \rightarrow n = 20$$

Es müssten mindestens 20 Personen teilnehmen!

e)

$$P(K_1, r, r) + P(K_2, r, r) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{20} + \frac{3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$

f)

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_{(r,r)}(K_2) = \frac{3/20}{1/5} = 3/4$

**1.**

a.

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-0\\0+6\\12-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\12\end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$NF_E: \quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right] = 0 \Leftrightarrow x_2 + 2 \cdot x_3 - 8 = 0 \qquad |\vec{n}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$HNF_E: \quad \frac{x_2 + 2 \cdot x_3 - 8}{\sqrt{5}} = 0$$

b.

$$d(R;E) = \left|\frac{-8}{\sqrt{5}}\right| = \frac{8}{5} \cdot \sqrt{5}$$

c.

$$H(2/6/1); \quad K(1/6/1); \quad L(1/4/2); \quad \left|\overrightarrow{LK}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}; \quad \overline{GL} = 1;$$

$$A_R = \overline{GL} \cdot \left|\overrightarrow{LK}\right| = \sqrt{5} \cdot 1 = \sqrt{5} \quad [FE]$$

d.

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix}-2\\-8\\-1\end{pmatrix} \quad in \ HNF_{x_1x_3-Ebene}: \ x_2 = 0$$

$$\rightarrow 4 - 8 \cdot \delta = 0 \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(1/0/\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{\left[\begin{pmatrix}-2\\-8\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]}{\sqrt{69}} = \frac{-8}{\sqrt{69}} \Rightarrow \gamma = 164{,}38° \mathrel{\hat{=}} 15{,}61°$$

$$\varphi = 90° - \gamma = 74{,}38°$$

e.

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{g} + \vec{h}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\5\\\tfrac{3}{2}\end{pmatrix} \rightarrow M\left(2/5/\tfrac{3}{2}\right)$$

$$d(M; x_1x_2 - Ebene) = \frac{3}{2}; \qquad \overline{MH} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5};$$

$\rightarrow$ wegen: $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \sqrt{5}\right) > 0$ kann das Fenster den Boden nicht berühren!

f.

$$\frac{h_{mess}}{40cm} = \frac{b_{mess}}{b} \Leftrightarrow b = 40cm \cdot \frac{b_{mess}}{h_{mess}} \rightarrow b = 40cm \cdot \frac{7{,}8}{1{,}2} = 2{,}60m$$

Wenn das Möbelstück bündig an der Wand steht gibt die $x_2$ – Koordinate von Punkt D minus die $x_2$ – Koordinate des Geradenaufpunkts den Abstand der Vorderkante zur Wand und damit die Tiefe des Möbelstücks an!

Damit gilt: Das Möbelstück ist 50 cm tief!

g.

Betrachte den Punkt P(2 / 5,5 / 0,4). Der Punkt liegt in der Kreisebene, die durch die Drehung des Fensters um M entsteht. Klar ist: Ist der Abstand von M zu P größer als der Radius des Kreises, so stößt das Fenster nicht am Möbelstück an!

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 1{,}1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{121}{100}} = \sqrt{\frac{146}{100}} > \sqrt{\frac{125}{100}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = r$$

Das Fenster stößt also nicht am Möbelstück an!