

Analysis / Aufgabengruppe II / Teil 1

1.

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \cdot \left[4 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \left[8 - \frac{8}{3} \right] = \frac{32}{3} \quad [FE]$$

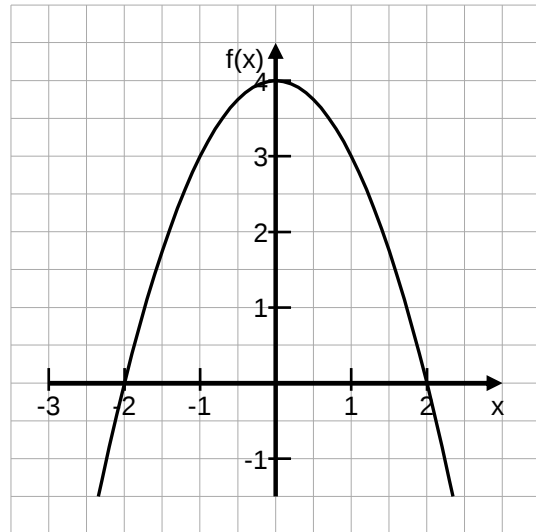
2.

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}; \quad \text{ID}_{\max} = \mathbb{R}_0^+;$$

$$F(x) = \int 3 \cdot \sqrt{x} dx = 2 \cdot \sqrt{x^3} + c$$

$$F(1) = 2 + c = 4 \rightarrow c = 2$$

$$F(x) = 2 \cdot \sqrt{x^3} + 2$$



3.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}; \quad \text{ID}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\text{a) } f(x) = \frac{\sin x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi \rightarrow N(k \cdot \pi / 0) \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2} = -\frac{\sin x}{x^2} = -f(x) \rightarrow \text{Pktsymm. zu } U(0/0)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x}{x^3}$$

4.

$$f(x) = \frac{(a_{2 \cdot n-1} \cdot x^{2 \cdot n-1} + a_{2 \cdot n-2} \cdot x^{2 \cdot n-2} + \dots + a_0) + 2 \cdot b \cdot (x+1)^{2 \cdot m} \cdot P(x)}{b \cdot (x+1)^{2 \cdot m} \cdot P(x)}$$

mit :

$$m \in \mathbb{N}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad n \leq m$$

$$a_i \in \mathbb{R} \text{ mit : } \exists a_j \mid a_j \neq 0 \quad i, j \in \{0, \dots, 2 \cdot n - 1\}$$

$$(x+1) \text{ teilt nicht } (a_{2 \cdot n-1} \cdot x^{2 \cdot n-1} + a_{2 \cdot n-2} \cdot x^{2 \cdot n-2} + \dots + a_0)$$

$$(x+1) \text{ teilt nicht } P(x)$$

Analysis / Aufgabengruppe II / Teil 2

1.

$$f(x) = 6 \cdot e^{-0,5 \cdot x} + x; \quad \text{ID}_f = \mathbb{R};$$

a)

$$f'(x) = -3 \cdot e^{-0,5 \cdot x} + 1 \quad -3 \cdot e^{-0,5 \cdot x} + 1 = 0 \Leftrightarrow -0,5 \cdot x = \ln \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln 3$$

$$\underbrace{f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2 \cdot \ln 3}_{\text{str. monoton fallend}} \quad \underbrace{f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2 \cdot \ln 3}_{\text{str. monoton steigend}} \rightarrow \text{Min}(2 \cdot \ln 3 / 2 \cdot (1 + \ln 3))$$

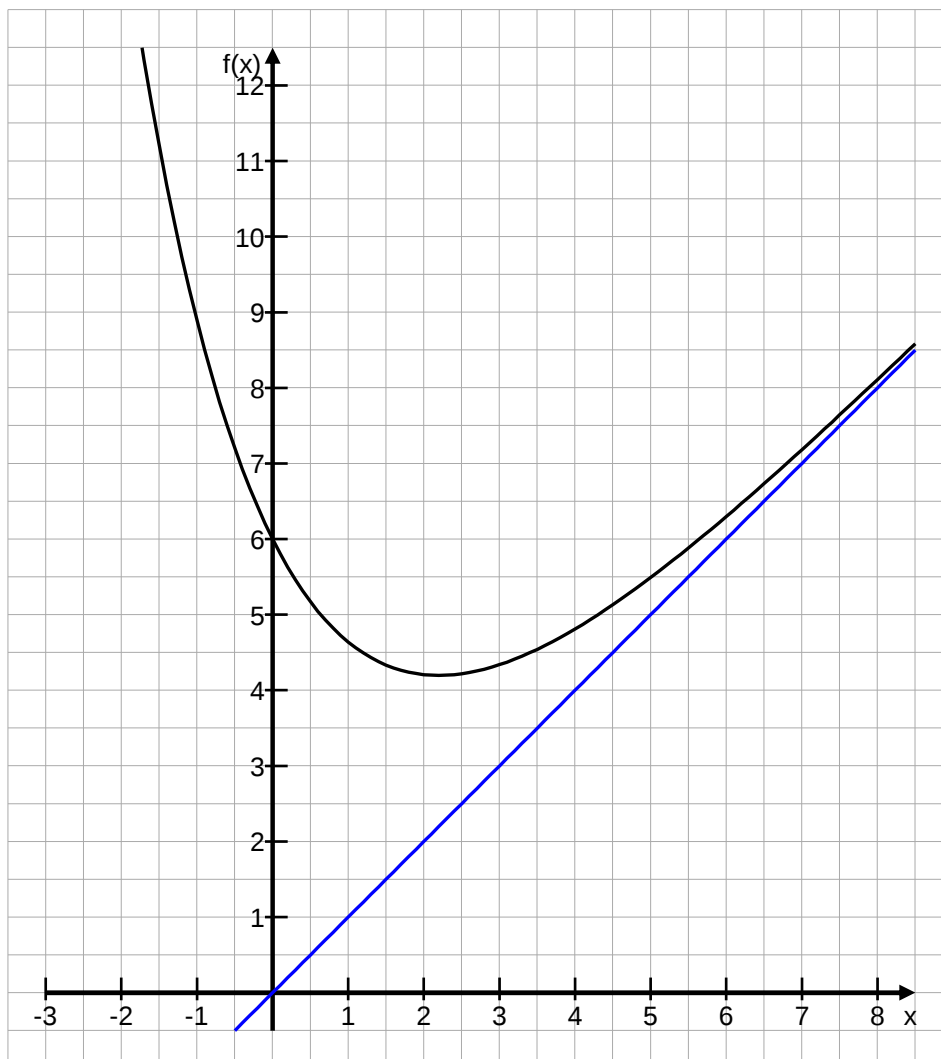
$$f''(x) = \underbrace{1,5 \cdot e^{-0,5 \cdot x}}_{>0} \rightarrow \text{linksgekrümmt auf ID}_f$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ siehe Monotonieverhalten}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} 6 \cdot e^{-0,5 \cdot x} = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$$

c)



zu c)

$$P(0/6), \text{ d.h.: } t = 6; \quad m = f'(0) = -3 \cdot e^0 + 1 = -2 \rightarrow y = -2 \cdot x + 6$$

2.

a)

$$\begin{aligned} e^x &\xrightarrow{\text{Spiegelung an y-Achse}} e^{-x} \\ &\xrightarrow{\text{Streckung in x-Richtung}} e^{-0,5 \cdot x} \\ &\xrightarrow{\text{Streckung in y-Richtung}} 6 \cdot e^{-0,5 \cdot x} \\ &\xrightarrow{\text{Verschiebung in +y-Richtung}} 6 \cdot e^{-0,5 \cdot x} + 1,5 = h(x) \end{aligned}$$

b)

Der Graph beschreibt die exponentielle **Abnahme** der von einer Maschine abgegebenen Schadstoffmenge pro Minute. Für große Zeiten nähert sich die abgegebene Menge 1,5 mg/min an; dieser Wert entspricht offensichtlich der Mindestabgabemenge bei Betriebstemperatur!

c)

$$\int_0^5 h(x) dx = \left[-12 \cdot e^{-0,5 \cdot x} + 1,5 \cdot x \right]_0^5 = (7,5 - 12 \cdot e^{-2,5}) + 12 = 19,5 - 12 \cdot e^{-2,5} \approx 18,51$$

Interpretation: In den ersten 5 min beträgt der Gesamtausstoß an Schadstoffen 18,51 mg.

3.

$$f_a(x) = 6 \cdot e^{-0,5 \cdot x} - a \cdot x \quad a \in \mathbb{R}^+; \quad \text{ID} = \mathbb{R};$$

a)

$$f_a(0) = 6 \cdot e^{-0,5 \cdot 0} - a \cdot 0 = 6 \rightarrow S(0/6) \in G_{f_a} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

$$f'_a(x) = \underbrace{-3 \cdot e^{-0,5 \cdot x}}_{<0} + \underbrace{(-a)}_{<0} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{6 \cdot e^{-0,5 \cdot x}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{a \cdot x}_{\substack{\rightarrow -\infty \\ +\infty}} \right) = -\infty$$

b)

$$x_1 = x_0 - \frac{f_a(x_0)}{f'_a(x_0)} = 0 - \frac{6}{-3-a} = \frac{6}{3+a}$$

Stochastik / Aufgabengruppe II

1.

a)

$$P_{200;0,1}(20 \leq k \leq 25) = P_{200;0,1}(k \leq 25) - P_{200;0,1}(k \leq 19) = 0,89954 - 0,46554 = 0,434$$

b)

$$P_{240;0,1}(k = 20) = \binom{240}{20} \cdot 0,1^{20} \cdot 0,9^{220} = 0,0628$$

c)

$$P(w) \cdot P(v) = P(w \cap v) \rightarrow P(w) = \frac{P(w \cap v)}{P(v)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \Rightarrow |w| = \frac{3}{10} \cdot 240 = 72$$

Es sind 72 Frauen an Bord!

2.

a)

$$\begin{array}{ll} H_0 : „p \leq 0,15“ & A_0 = \{0, 1, \dots, k\} \\ H_1 : „p > 0,15“ & A_1 = \{k + 1, \dots, 200\} \end{array}$$

$$\text{Fehler 1. Art: } \begin{cases} P_{200;0,15}(k + 1 \leq X \leq 200) \leq 0,05 \rightarrow P_{200;0,15}(0 \leq X \leq k) \geq 0,95 \\ \rightarrow k = 38 \end{cases}$$

b)

Bei der alternativen Nullhypothese beträgt bei einem Test auf den Fehler 1. Art die Irrtumswahrscheinlichkeit bis zu 95 %! Für die Wahl der Nullhypothese stand also die Minimierung des finanziellen Verlustes im Vordergrund!

3.

a)

Typ: x	K	$\bar{K}$	
B	X	0,05	0,96
$\bar{B}$	0,03	0,01	0,04
	0,94	0,06	1

b)

$$P_{\bar{B}}(\bar{K}) = \frac{P(\bar{K} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \rightarrow$$

$$P_{\bar{B}}(\bar{K}) = \frac{0,01}{0,04} = 0,25$$

$$X = 0,91;$$

Ereignis: Klimaanlage und Beleuchtung
funktionieren einwandfrei!

c)

Typ: Y	K	$\bar{K}$	
B	0,95		
$\bar{B}$	0,01 1. Schritt		0,02 2. Schritt
		0,04	1

Wegen:

$$\left. \begin{aligned}
 &P(\bar{K} \cup \bar{B}) = 0,05 \text{ und } P(K \cap B) = 0,95 \\
 &P(\bar{K} \cup \bar{B}) = \underbrace{P(\bar{K} \cap B)}_{0,05} + \underbrace{P(\bar{K} \cap \bar{B})}_{P(\bar{K})=0,04} + \underbrace{P(B \cap K)}_{0,01} \Rightarrow P(\bar{K} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) - 0,01 \\
 &\underbrace{P(B \cap K)}_{=0,01} + P(\bar{K} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})
 \end{aligned} \right\}$$

Beachte:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Beleuchtung nicht funktioniert unter der Annahme, dass mindestens ein Mangel vorliegt beträgt 40 %, d.h.:

$$\begin{aligned}
 P_{(\bar{K} \cup \bar{B})}(\bar{B}) &= 0,40 \rightarrow P_{(\bar{K} \cup \bar{B})}(\bar{B}) = \frac{P[(\bar{K} \cup \bar{B}) \cap \bar{B}]}{P(\bar{K} \cup \bar{B})} = \frac{P(\bar{B})}{P(\bar{K} \cup \bar{B})} \\
 \Rightarrow P(\bar{B}) &= \underbrace{P(\bar{K} \cup \bar{B})}_{0,05} \cdot \underbrace{P_{(\bar{K} \cup \bar{B})}(\bar{B})}_{0,40} = 0,05 \cdot 0,40 = 0,02
 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$P(\bar{K} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) - 0,01 = 0,01$ und der Rest der Aufgabe ist nur noch eine Fingerübung ...

Typ: Y	K	$\bar{K}$	
B	0,95	0,03	0,98
$\bar{B}$	0,01	0,01	0,02
	0,96	0,04	1

Geometrie / Aufgabengruppe I

a)

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{AB} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}} + \mu \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{AC} = \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix}} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow NF: 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 = 0$$

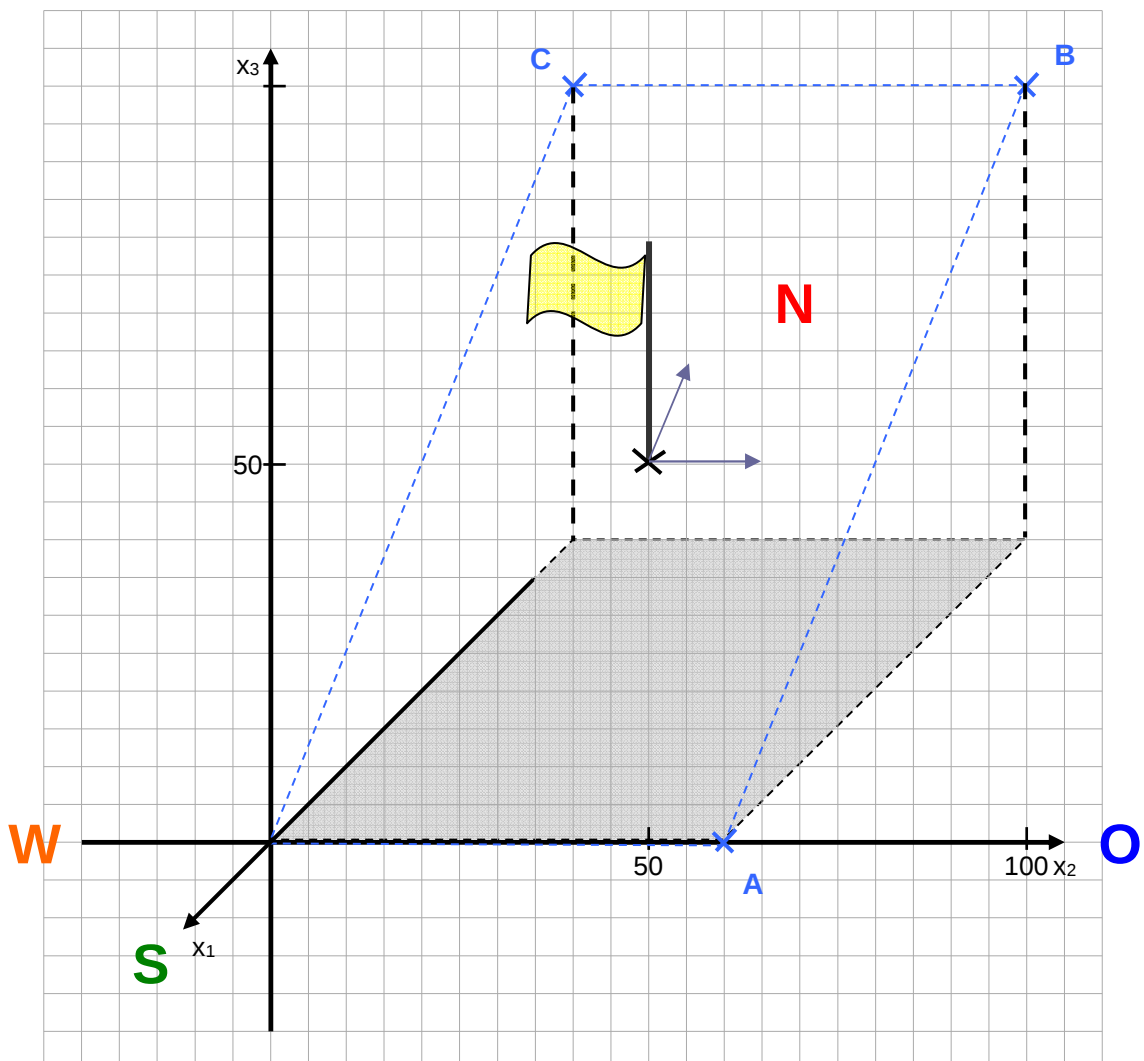
Die x_2 -Achse ist in E enthalten! $\cos \varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow \varphi = 36,87^\circ$

b)

Der Ursprung werde mit O bezeichnet! Klar ist zudem: O ist in E enthalten!

$$|\vec{OA}| = |\vec{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 60; \quad |\vec{OC}| = |\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \right| = 100; \quad |\vec{OA}| \cdot |\vec{OC}| = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = 0;$$

$\Rightarrow$ Das Viereck OABC ist ein Rechteck! $A_R = 60 \cdot 100 = 6000 \text{ [FE]}$



c)

Das Grundbuchamt betrachtet als effektiv nutzbare Fläche (sinnvollerweise) nur die senkrechte Projektion des Rechtecks in die x_1x_2 – Ebene! Der hellgrau hinterlegte Flächeninhalt beträgt in der Tat $A = 60\text{m} \cdot 80\text{m} = 4800\text{ m}^2$.

d)

g in HNF von E:

$$\frac{3 \cdot (-20 + 4 \cdot \lambda) + 0 \cdot (40 + 5 \cdot \lambda) + 4 \cdot (40 - 3 \cdot \lambda)}{5} = \frac{-60 + 12 \cdot \lambda + 160 - 12 \cdot \lambda}{5} = 20 \neq 0$$

Damit gilt:

g ist parallel zu E (kein Schnittpunkt wegen falscher Aussage); insbesondere ergibt sich der Abstand zu E zu 20 m!

e)

Falls die Gerade h, die senkrecht zur Ebene E steht (Aufpunkt M), die Gerade g schneiden sollte, ist diese Bedingung erfüllt!

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + \xi \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{X} : g$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems folgt für: $\lambda = -2$ und $\xi = 4$;

f)

$$v_O: \vec{m} - 15 \cdot \frac{\vec{AO}}{|\vec{AO}|} \rightarrow \vec{v}_O = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix} \rightarrow v_O(-40/45/30)$$

$$v_N: \vec{m} - 15 \cdot \frac{\vec{CO}}{|\vec{CO}|} \rightarrow \vec{v}_N = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 30 \\ 39 \end{pmatrix} \rightarrow v_N(-52/30/39)$$