Abiturprüfung 2013 / Analysis / Aufgabengruppe I

Teil 1

1. a)

$$g(x)=\sqrt{3\cdot x+9} \qquad ID_g=[-3;+\infty[\qquad N(-3/0)$$

b)

$$g'(x)=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3\cdot x+9}} \rightarrow m_t=g'(0)=\frac{1}{2}$$

$$y=m\cdot x+t \rightarrow 3=t \rightarrow t:\ y=\frac{1}{2}\cdot x+3$$

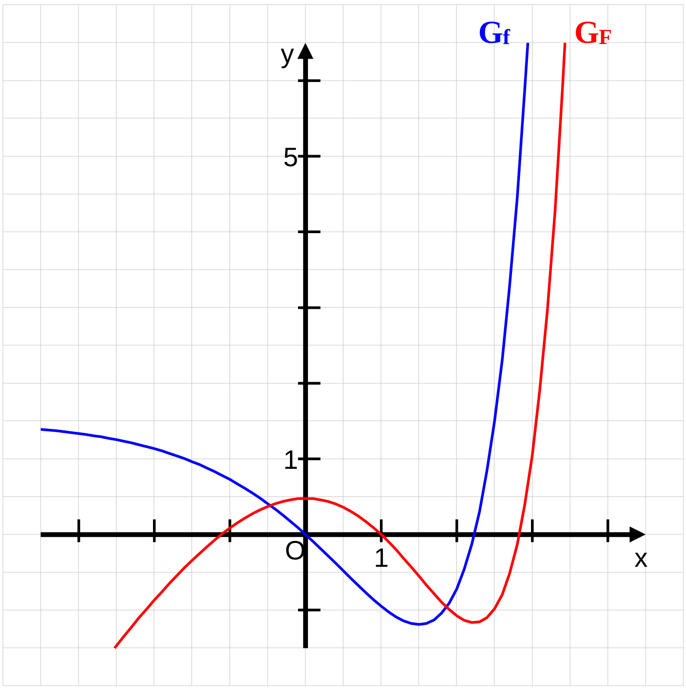
2. a) $f(x)=x^2+2$

b) $f(x)=\dfrac{4\cdot x}{x^2+1} \qquad f'(x)=4\cdot\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \rightarrow \begin{cases} Min(-1/-2) \\ Max(1/2) \end{cases}$

3.

$$\underbrace{(\ln x-1)}_{x_1=e}\cdot\underbrace{\left(e^x-2\right)}_{x_2=\ln 2}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{x}-3\right)}_{x_3=\frac{1}{3}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=e \\ x_2=\ln 2 \\ x_3=\frac{1}{3} \end{cases}$$

4.



Teil II

1. a)

$$f(-x)=2\cdot(-x)\cdot e^{-0,5\cdot(-x)^2}=-2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}=-f(x)$$ (Pktsymmetrie)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} 2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot x}{e^{0,5\cdot x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x\cdot e^{0,5\cdot x^2}}=0$$

b)

$$f(x)=2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}$$

$$\to f'(x)=2\cdot e^{-0,5\cdot x^2}-2\cdot x^2\cdot e^{-0,5\cdot x^2}=2\cdot\left(1-x^2\right)\cdot e^{-0,5\cdot x^2}$$

$$\to f'(x)=0\Leftrightarrow\left(1-x^2\right)=(1+x)\cdot(1-x)=0$$

$$\to TIP\left(-1/\frac{-2}{\sqrt{e}}\right)\quad HOP\left(+1/\frac{+2}{\sqrt{e}}\right)$$

Die Art der Extremwerte folgt aus der Symmetrie, der Stetigkeit und dem Vorzeichen des Grenzwertes für x gegen + ∞ von f(x) (rechnerischer Nachweis in Teilaufgabe a)).

c)

$$m_S=\frac{f(0,5)-f(-0,5)}{0,5-(-0,5)}=\frac{1}{\sqrt[8]{e}}-\frac{-1}{\sqrt[8]{e}}=\frac{2}{\sqrt[8]{e}}\approx 1,765\qquad m_{T_{x=0}}=2$$

$$d=\frac{2-1,765}{2}=11,75\%$$

d)

$$f(x)=2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}$$

$$A(u)=\int_0^u f(x)dx=\int_0^u 2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}dx=-2\cdot\int_0^u\left(-x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}\right)dx=$$

$$=-2\cdot\left[e^{-0,5\cdot x^2}\right]_0^u=-2\cdot\left[e^{-0,5\cdot u^2}-1\right]=2-2\cdot e^{-0,5\cdot u^2}$$

$$\lim_{u\to\infty} A(u)=\lim_{u\to\infty}\left[2-2\cdot e^{-0,5\cdot u^2}\right]=2$$

Der Graph G_f schließt mit der gesamten positiven x-Achse ein endliches Flächenstück mit dem Flächeninhalt 2 FE ein (uneigentliches Integral)!

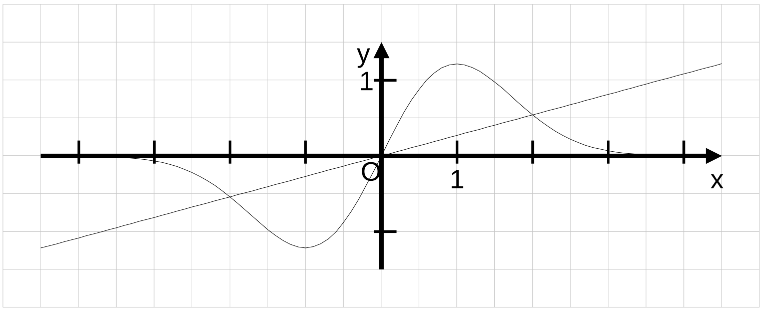
e)

$$f(x)=2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}=\frac{2}{e^2}\cdot x=k(x)\Leftrightarrow 2\cdot\left(e^{-0,5\cdot x^2}-e^{-2}\right)\cdot x=0$$

$$S_1(0/0);\quad e^{-0,5\cdot x^2}-e^{-2}=0\Leftrightarrow -0,5\cdot x^2=-2\Leftrightarrow x^2=4\to\begin{cases}S_2\left(2/\overbrace{\frac{4}{e^2}}^{k(2)}\right)\\ S_3\left(-2/\frac{-4}{e^2}\right)\end{cases}$$

$$B=A(2)-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot k(2)=2-\frac{2}{e^2}-\frac{4}{e^2}=2-\frac{6}{e^2}\approx 1,19\quad FE$$

zu e)



2. a)

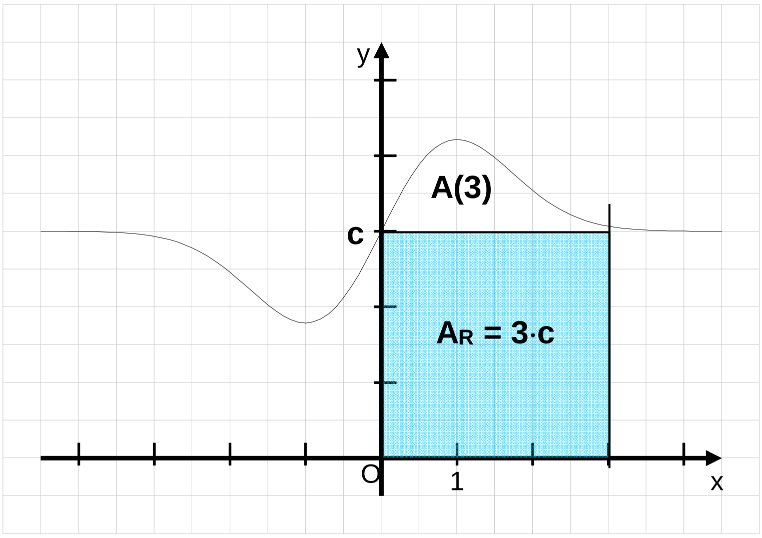
$$g_c(x) = f(x) + c = 2 \cdot x \cdot e^{-0,5 \cdot x^2} + c$$

$$HOP_g\left(1 / \frac{2}{\sqrt{e}} + c\right); \quad \lim_{x \to \infty} g_c(x) == c$$

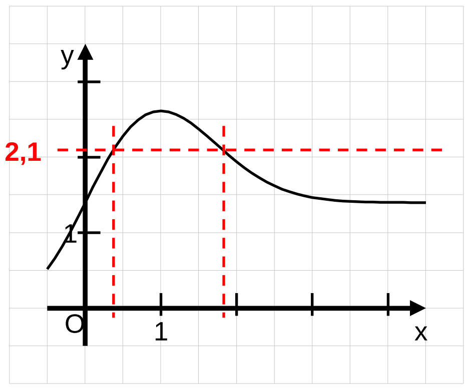
b)

$\alpha)\quad c = +5; \qquad \beta)\quad c = 0; \qquad \gamma)\quad c = 0,5;$

c)



3. a)



Von etwa 1959 – 1973 lag die Geburtenziffer bei mindestens 2,1!

b)

Leider werden die Einheimischen auf lange Sicht aussterben!

c)

Die stärkste Abnahme liegt vor, wenn die Tangente am Funktionsgraphen den kleinstmöglichen Wert annimmt (etwa im Jahr 1975). Der Graph der ersten Ableitung besitzt an dieser Stelle ein Minimum. Um die Vermutung zu bestätigen sollte die zweite Ableitung also ab 1975 positiv sein!

Abiturprüfung 2013 / Stochastik / Aufgabengruppe II

1. a)

	J	$\overline{J}$	
E	0,04	0,40	0,44
$\overline{E}$	0,08	0,48	0,56
	0,12	0,88	1

b)

$$P_J\left(\overline{K}\right)=\frac{P\left(J\cap\overline{K}\right)}{P(J)}\rightarrow P_J\left(\overline{K}\right)=\frac{0{,}08}{0{,}12}=\frac{2}{3}\approx 66{,}7\%$$

$$P_{\overline{J}}\left(\overline{K}\right)=\frac{P\left(\overline{J}\cap\overline{K}\right)}{P\left(\overline{J}\right)}\rightarrow P_{\overline{J}}\left(\overline{K}\right)=\frac{0{,}48}{0{,}88}=0{,}\overline{54}\approx 54{,}55\%$$

$$\rightarrow P_J\left(\overline{K}\right)>P_{\overline{J}}\left(\overline{K}\right)$$

… da der Anteil der Jungwähler an der Zahl der Wahlberechtigten relativ gering ist!

c)

$$B(48/0{,}12/6)=\binom{48}{6}\cdot 0{,}12^6\cdot 0{,}88^{42}=17{,}07\%$$

2. a)

H_0: „p ≤ 0,5“ $A_0 = \{0, 1, 2, …, k\}$
H_1: „P > 0,5“ $A_1 = \{k+1, ..., 200\}$

Die Nullhypothese soll abgelehnt werden obwohl sie zutreffend ist …

$$B(200/0{,}5/k+1\le i\le 200)\le 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow 1-B(200/0{,}5/0\le i\le k)\le 0{,}05\Leftrightarrow B(200/0{,}5/0\le i\le k)\ge 0{,}95$$

$$\xrightarrow{TW} k=112$$

Die Nullhypothese kann auf dem vorgegebenen Signifikanzniveau erst ab dem 113 Befragten mit positivem Ergebnis für A abgelehnt werden.

b)

Das Risiko, einen Fehler zu begehen wenn auf die Kampagne verzichtet wird, liegt bei 5 %. Das ist hinreichend gering!

3. a)

$$P(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}}=\frac{8\cdot 6}{220}=\frac{12}{55};\quad P(X=2)=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}}=\frac{28\cdot 4}{220}=\frac{28}{55};$$

b)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$
X·P(X)	0	$\frac{12}{55}$	$\frac{56}{55}$	$\frac{42}{55}$
X^2·P(X)	0	$\frac{12}{55}$	$\frac{112}{55}$	$\frac{126}{55}$

$$E(X)=2;\quad VAR(X)=E(X^2)-[E(X)]^2\rightarrow VAR(X)=\frac{50}{11}-4=\frac{6}{11}$$

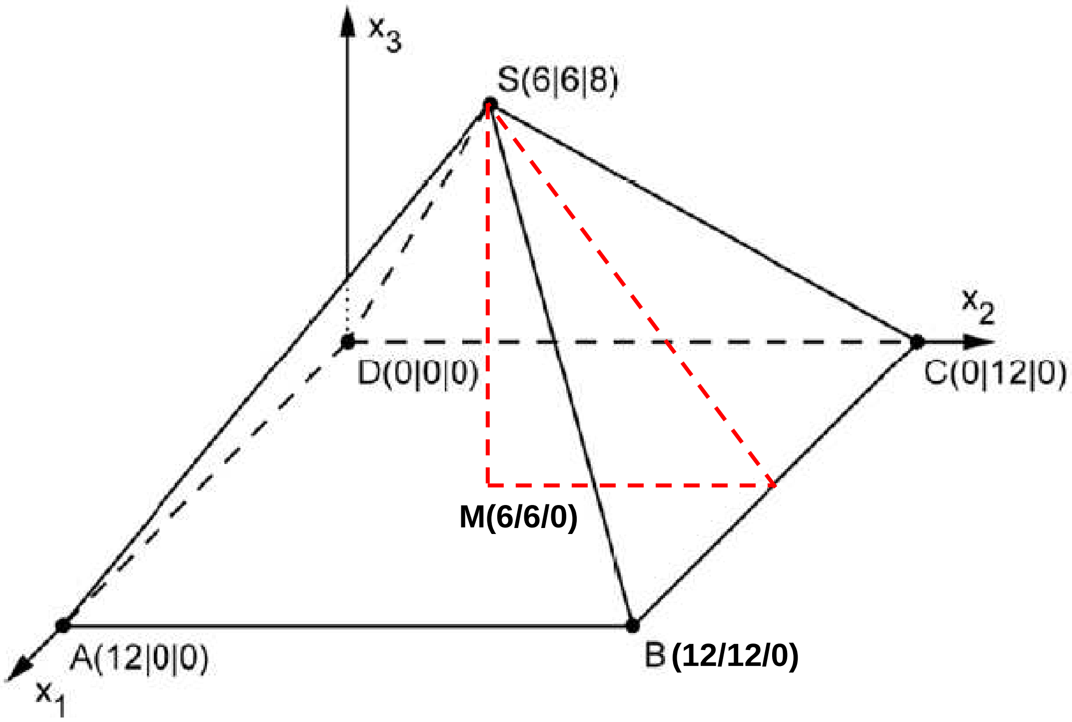
c)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$
X·P(X)	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$
X^2·P(X)	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{8}{3}=\frac{24}{9}$

$$E(X)=2;\quad VAR(X)=E(X^2)-[E(X)]^2\rightarrow VAR(X)=\frac{42}{9}-4=\frac{2}{3}$$

Aufgrund der Abweichungen des 3-ten Wertes (Quadratischer Eingang von X) kann vermutet werden, dass VAR(Y) > VAR(X).

Geometrie Aufgabengruppe II Abiturprüfung 2013



Aufgabe 1:

a) Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot \overline{MS} \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 384\ [VE]$

b) E in Normalenform:

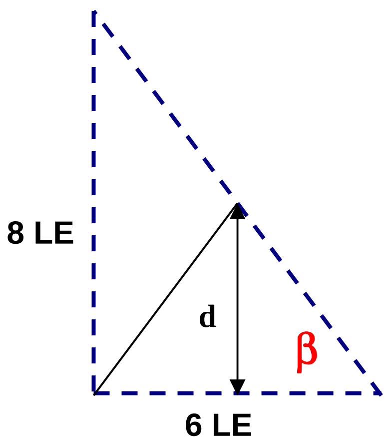
$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0+96 \\ 72-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow E: \quad \vec{n} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 48 = 0$$

c) Berechnung von d:

$$\left.\begin{array}{l} \tan\beta = \frac{8}{6} \rightarrow \beta = 53{,}1° \\ k = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{8}{k} = \frac{k}{d}$$

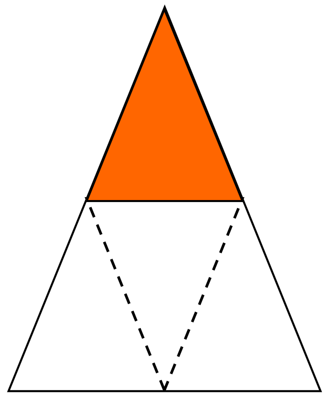
$$\Leftrightarrow d = \frac{4{,}8^2}{8} = 1{,}2 \cdot 2{,}4 = 2{,}88$$



d) Fläche:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CS}\right|=\frac{1}{2}\cdot|\vec{n}|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\96\\72\end{pmatrix}\right|=60$$

$$\Rightarrow A_g=\frac{1}{4}\cdot A=15\ \ [FE]$$



e) Wirkungsgrad:

β bereits berechnet zu 53,1°
d.h.: Wirkungsgrad liegt bei etwa 97° (Tabelle)

Aufgabe 2:

a) Berechnung des Schnittpunkts T

$$g:\vec{X}=\begin{pmatrix}8\\1\\7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-9\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}=\vec{X}:h$$

$$1+\lambda=5-2\cdot\mu\Leftrightarrow\lambda=4-2\cdot\mu$$

$$8+3\cdot\lambda=-1+\mu\Rightarrow 8+3\cdot(4-2\cdot\mu)=-1+\mu\Leftrightarrow 20-6\cdot\mu=-1+\mu\Leftrightarrow\mu=3$$

$$\Rightarrow\lambda=-2$$

$$\xrightarrow{\text{Probe}}7+2\cdot\lambda=-9+4\cdot\mu\rightarrow 3=\overbrace{7-4}^{\lambda=-2}=\overbrace{-9+12}^{\mu=3}=3\quad(w)$$

$$\rightarrow T(2/-1/3)$$

b) Beachte:

$$g:\vec{X}=\begin{pmatrix}8\\1\\7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\quad aber\ auch:\quad g:\vec{X}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow P(5/0/5)\ \ für\ \lambda=1\qquad Q(-1/-2/1)\ \ für\ \lambda=-1$$

c) Durch Ausnützen der Bedingung, dass sich die Diagonalen eines Rechtecks gegenseitig halbieren und gleich lang sind ergibt sich die verlangte Lösung!

$$\left|\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{14}\xrightarrow{REB}\quad\mu\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{14}\Leftrightarrow\mu=\sqrt{\frac{14}{21}}\rightarrow\overrightarrow{(u,v)}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-9\end{pmatrix}\pm\sqrt{\frac{14}{21}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$$