Analysis 2 / Teil A

1.

a)

$$ID_g = \left]-\frac{3}{2};\ +\infty\right[;\quad W_g = IR;$$

b)

$$g(x) = \ln(2\cdot x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$g'(x) = \frac{2}{2\cdot x+3} \rightarrow m_t = g'(-1) = 2$$

$$\rightarrow y = m\cdot x + t$$

$$0 = -2 + t \rightarrow t = 2$$

$$\rightarrow y = 2\cdot x + 2$$

2.

a) $f(x) = x^3 - 6\cdot x^2 + 11\cdot x - 6$

$$f'(x) = 3\cdot x^2 - 12\cdot x + 11$$

$$f''(x) = 6\cdot x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow W(2;\ 0)\ \ in\ \ y = x - 2 \Rightarrow y = 2 - 2 = 0\ \ (wahr)$$

b) $f(x) = (x-1)^3 - 6\cdot(x-1)^2 + 11\cdot(x-1) - 4$

3.

a) $g(x) = \sqrt{5-x}$

b) $k(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+3)^2}$

4.

$$f_a(x) = x\cdot e^{a\cdot x} \rightarrow f_a'(x) = x\cdot a\cdot e^{a\cdot x} + e^{a\cdot x} = (x\cdot a+1)\cdot e^{a\cdot x}$$

$$f_a'(2) = (2\cdot a+1)\cdot e^{a\cdot 2} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Analysis 2 / Teil B

1.

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^4+b\cdot x^3 \\ f'(x)=4\cdot a\cdot x^3+3\cdot b\cdot x^2 \\ f''(x)=12\cdot a\cdot x^2+6\cdot b\cdot x \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} i. & a+b=-1 \\ ii. & 12\cdot a+6\cdot b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{ll} i. & b=-1-a \\ ii. & 6\cdot a-6=0 \end{array} \Rightarrow a=1;\ b=-2;$$

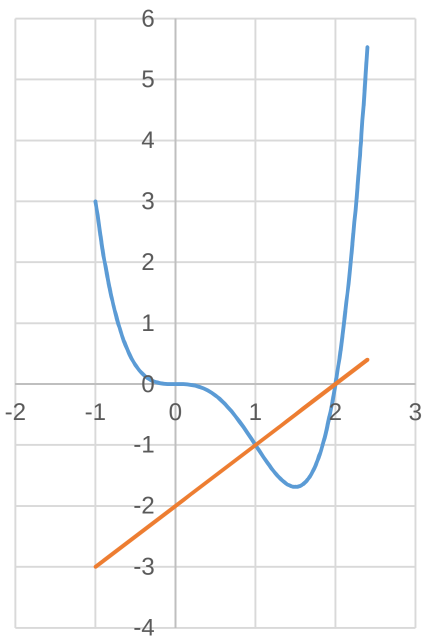
$$\rightarrow f(x)=x^4-2\cdot x^3$$

b)

$$f'(x)=4\cdot x^3-6\cdot x^2=x^2\cdot(4\cdot x-6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1/2}=0 \\ x_3=3/2 \end{cases} \rightarrow TIP\left(3/2;\ -27/16\right)$$

Die Tiefpunkteigenschaft ist aus dem Öffnungsverhalten der biquadratischen Funktion ersichtlich!

c)



$$g(x)=x-2$$

d)

$$F(x)=\frac{1}{5}\cdot x^5-\frac{1}{2}\cdot x^4$$

$$V=\frac{A_o}{A_u}=\frac{\left|\int_0^1 f(x)dx\right|+\left|\int_1^2 g(x)dx\right|}{\left|\int_1^2 f(x)dx\right|-\left|\int_1^2 g(x)dx\right|}=\frac{\frac{3}{10}+\frac{1}{2}}{\frac{13}{10}-\frac{1}{2}}=\frac{4/5}{4/5}=1$$

Das Verhältnis der Teilflächen ist 1:1.

2.

a)

Abb. 1: $f_2(x) = x^4 - 2 \cdot x^2$ (nach oben geöffnet / drei Extremstellen)

Abb. 2: $f_4(x) = -x^4$ (nach unten geöffnet)

~~Abb. 3:~~ $f_3(x) = x^4 - 2 \cdot x^3$ Bild in Angabe ist falsch / kein Terrassenpunkt bei (0;0)

Abb. 4: $f_0(x) = x^4 - 2$ (Symmetrie zur y- Achse / nur ein Tiefpunkt)

b)

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ n \geq 5}} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ n \geq 5}} \left[-2 \cdot x^n + x^4\right] = \lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ n \geq 5}} \left[-2 \cdot x^n\right]$$

gerades n**:** $\lim\limits_{\substack{x \to \pm\infty \\ n \geq 5}} \left[-2 \cdot x^n\right] \to$ „- ∞“

ungerades n**:** $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ n \geq 5}} \left[-2 \cdot x^n\right] \to$ „+ ∞“

$\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ n \geq 5}} \left[-2 \cdot x^n\right] \to$ „- ∞“

3.

a)

$$g(t) = -\frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{4}\right) = -\frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{16} < 0$$

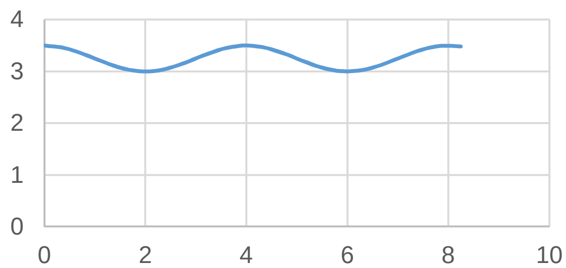
Die Testperson atmet aus!

b) Solange das Vorzeichen der Funktion negativ ist wird ausgeatmet. Logisch ist deshalb, dass zum Zeitpunkt t = 2 s (Vorzeichenwechsel der Funktion von Minus nach Plus) das Luftvolumen in der Lunge der Testperson minimal ist!

c) $$\int_2^4 g(t)dt = \int_2^4 \left[-\frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\right] dt = \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\Big|_2^4 = \frac{1}{4} \cdot \left[\underbrace{\cos(2 \cdot \pi)}_{=1} - \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\right] = \frac{1}{2}$$

Während eines Einatemvorganges ändert sich das Lungenvolumen um 0,5 VE.

d)



e) Die Atemfrequenz der Testperson beträgt $\frac{1}{4}\frac{1}{sek} = \frac{15}{60}\frac{1}{sek} = 15\frac{1}{\mathbf{min}}$.

$h(t) = a \cdot \mathbf{sin}(b \cdot t)$

$f_{a,\,neu} = 15 \cdot \frac{6}{5}\frac{1}{\mathbf{min}} = 18\frac{1}{\mathbf{min}} = \frac{18}{60} \cdot \frac{1}{sek} = \frac{3}{10}\frac{1}{sek} = \frac{1}{3{,}\overline{3}}\frac{1}{sek}$

Der jüngere Mensch benötigt für einen vollständigen Atemzyklus 3,3 s.
Damit folgt:

$$\frac{\pi}{2} \cdot t = 2 \cdot \pi \rightarrow t = 4 \xrightarrow{r.r.} t = 3{,}3 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} \Leftrightarrow 2 \cdot \pi = \frac{t \cdot 6 \cdot \pi}{10} = \frac{3 \cdot \pi}{5} \cdot t$$

$$\Rightarrow b = \frac{3 \cdot \pi}{5}$$

Stochastik 1 / Teil A

1.

c)

$$P(A)=\binom{5}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)=5\cdot p^4-5\cdot p^5$$

$$P(B)=p^2\cdot(1-p)^3$$

d) Mit zunehmender Verweildauer im Schießstand dürfte sich, durch Beruhigung des Kreislaufes auch die Trefferwahrscheinlichkeit erhöhen, d.h.: die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer kann nicht zwingend als konstant vorausgesetzt werden. Bei Fehlschüssen könnte sich die Nervosität bzw. die Versagensangst negativ auf die Trefferwahrscheinlichkeit auswirken … (u.v.m.).

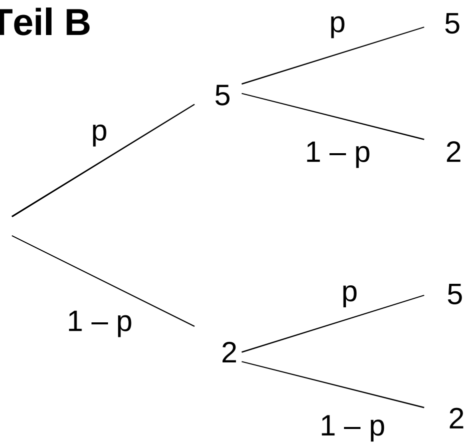
2.

c) Insgesamt sind sechs Personen eingeladen. Von den sieben Plätzen ist der mittlere stets belegt! Damit ergeben sich – ohne weitere Einschränkung – 6! = 720 unterscheidbare Sitzordnungen!

d) Mit der vorgegebenen Einschränkung erhält man $2\cdot\left[\binom{3}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot 4!\right]=144$ unterscheidbare Anordnungen!

Stochastik 1 / Teil B

1.



e)

$$P(10\%)=2\cdot p\cdot(1-p)=2\cdot p-2\cdot p^2$$

f) $E(X)=4\cdot(1-p)^2+10\cdot\left(2\cdot p-2\cdot p^2\right)+25\cdot p^2$

$$E(X)=4-8\cdot p+4\cdot p^2+20\cdot p-20\cdot p^2+25\cdot p^2$$

$$=9\cdot p^2+12\cdot p+4$$

g)

$$E(X)=9\cdot p^2+12\cdot p+4=16$$

$$\Leftrightarrow 9\cdot p^2+12\cdot p-12=0\Rightarrow p=\frac{-12\pm\sqrt{144+3\cdot 144}}{18}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}=0{,}66=66{,}6\%$$

h)

$$B\left(n,\frac{1}{9},n\geq k\geq 1\right)=1-B\left(n,\frac{1}{9},k=0\right)>0{,}99\Leftrightarrow B\left(n,\frac{1}{9},k=0\right)<0{,}01$$

$$\to\left(\frac{8}{9}\right)^n<0{,}01\Leftrightarrow n>\frac{\ln 0{,}01}{\ln\left(8/9\right)}=39{,}09875\ldots\to n=40$$

Es müssen mindestens 40 Kunden am Glücksrad drehen!

2.

c)

H_0: „$p \geq 0{,}15$“ $A_0 = \{k+1, \ldots, 200\}$
H_1: „$p < 0{,}15$“ $A_1 = \{0, \ldots, k\}$

$B(200, p \geq 0{,}15, 0 \leq j \leq k) \leq 0{,}10 \xrightarrow{TW} k = 23$

Befinden sich bei 200 Befragten weniger als 24, die sich zu einer App – Nutzung bereiterklären wird irrtümlicherweise die Nullhypothese verworfen!

d) Die Angst vor dem Imageverlust ist schwerwiegender als die Kostenfrage, da die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich auf die Einführung der App zu verzichten mit 10% relativ klein gewählt wurde!

Geometrie 1 / Teil A

1.

e) A und B liegen auf der Hilfsgeraden h* mit $h^{*}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$d(A;B) = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow C(4;\ 9;\ 10)$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow D(-4;\ -7;\ -6)$$

f)

$$\vec{f_1} = \vec{b} + \overrightarrow{AE} \rightarrow \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow F_1(3;\ 6;\ 9)$$

$$\vec{f_2} = \vec{b} - \overrightarrow{AE} \rightarrow \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow F_1(1;\ 4;\ 3)$$

g) Die Behauptung ist korrekt, weil …

$$\overrightarrow{DA} \circ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -16 + 16 + 0 = 0 \Rightarrow \angle\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right) = 90^\circ$$

h) $V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot G \cdot \left|\overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = 48\ [VE]$

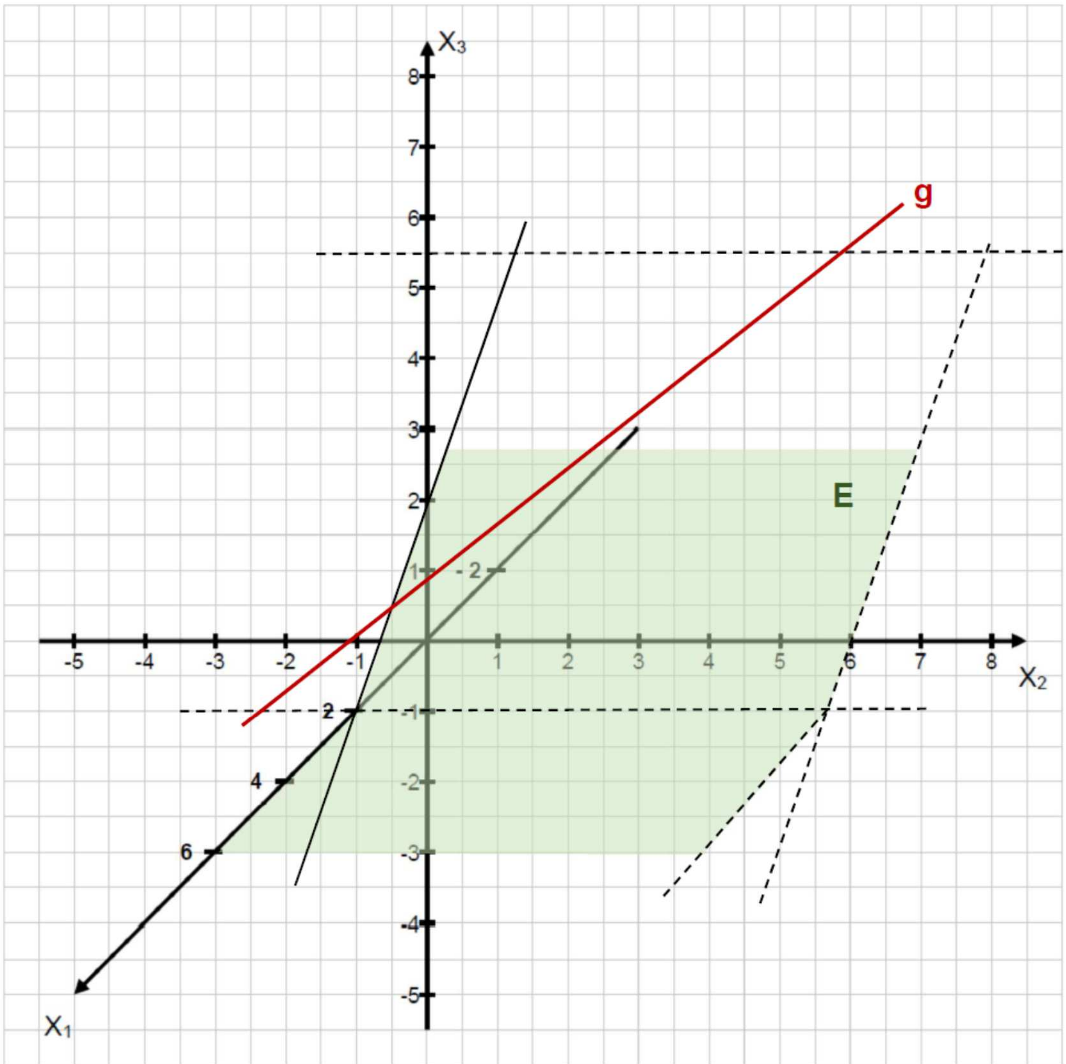
Geometrie 1 / Teil B

a) Die x_2 – Achse verläuft parallel zur Ebene E.

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad in \ NF_E: \quad x_1 + x_3 = 2$$

$$\rightarrow -\lambda + 2 + \lambda = 2 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow g \subset E$$

$$S_{x_1}(2;\ 0;\ 0), \quad S_{x_3}(0;\ 0;\ 2)$$



b) $$\cos\varphi^* = \frac{\vec{n}_{x_1x_2} \circ \vec{r}_g}{\left|\vec{n}_{x_1x_2}\right| \cdot \left|\vec{r}_g\right|} \rightarrow \cos\varphi^* = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi^* = 60° \\ \varphi = 30° \end{cases}$$

Der Neigungswinkel der Geraden zur Horizontalen beträgt 30°.

c)

$$Bed.:\ \overrightarrow{MB}\circ\vec{r}_g=0;\ B\in g\rightarrow\vec{b}=\begin{pmatrix}-\lambda\\ \sqrt{2}+\lambda\cdot\sqrt{2}\\ 2+\lambda\end{pmatrix};$$

$$Lsng.:\ \overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}-\lambda\\ \sqrt{2}+\lambda\cdot\sqrt{2}\\ 2+\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 3\cdot\sqrt{2}\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda\\ -2\cdot\sqrt{2}+\lambda\cdot\sqrt{2}\\ \lambda\end{pmatrix}$$

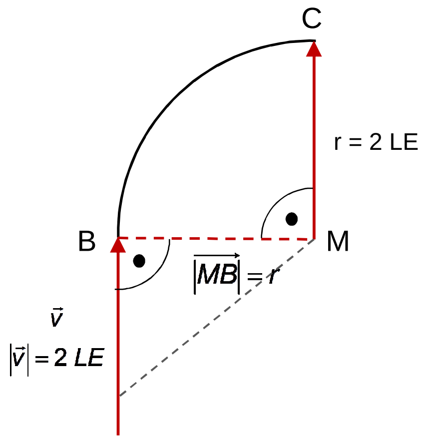
$$\overrightarrow{MB}\circ\vec{r}_g=\begin{pmatrix}-\lambda\\ -2\cdot\sqrt{2}+\lambda\cdot\sqrt{2}\\ \lambda\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}=4\cdot\lambda-4=0\Leftrightarrow\lambda=1$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\cdot\sqrt{2}\\ 3\end{pmatrix}\rightarrow B\left(-1;\ 2\cdot\sqrt{2};\ 3\right)$$

$$r=\left|\overrightarrow{MB}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4}=2\ \ [LE]\mathrel{\hat{=}}\left|\vec{r}_g\right|$$

d) Beachte die folgende Skizze …

Der Radius liegt nach dem Durchfahren der 90° - Kurve parallel zum Richtungsvektor der Geraden! Da der Radius zudem der Länge des Richtungsvektors entspricht ist die Behauptung verifiziert (das Bild allein sollte schon reichen)!



e) $s=2\cdot 10m+\dfrac{2\cdot\overbrace{(2\cdot 10m)}^{=r}\cdot\pi}{4}=51{,}415\ m\leftrightarrow v=\dfrac{s}{t}\Leftrightarrow t=\dfrac{s}{v}=\dfrac{51{,}415\ m}{15\ \frac{m}{s}}=3{,}4\ s$