Abiturprüfung 2023 Mathematik

Analysis Aufgabengruppe 1

Teil A:

Aufgabe 1:

a) $f(x) = \ln(x-3)\ mit\ D_f =]3;\ +\infty[\ und\ NS: x = 4$

b) $f'(x) = \frac{1}{x-3} = 2 \leftrightarrow 2x - 6 = 1 \leftrightarrow x = \frac{7}{2};$

Aufgabe 2:

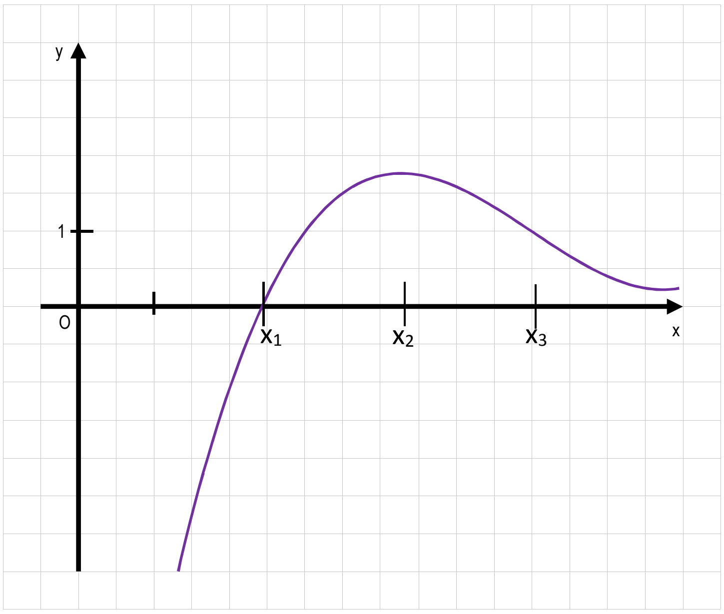
a) $g(x) = \frac{1}{x^2} - 1;\quad waagr.Asympt.: y = \ -1;\ \ W_g =]-1;\ +\infty[$

b) $\int_{0,5}^{2} g(x)dx = \int_{0,5}^{2}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx = \left[-\frac{1}{x} - x\right]_{0,5}^{2} = -\frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) = 0;$

Aufgabe 3:

a) f besitzt eine Nullstelle in x_1 und ein Maximum in x_2, weil in x_3 eine Wendestelle von f vorliegen muss, an der sich der Graph G_f von rechts- zu linksgekrümmt verändert; d.h. G_f muss zumindest noch ein lokales Minimum für $x > x_3$ besitzen. Weitere spezifische Eigenschaften werden nicht aufgeführt, aber auch nicht ausgeschlossen! Da es sich bei f um eine ganzrationale Funktion handeln soll, muss G_f damit mindestens den Grad 3 besitzen!

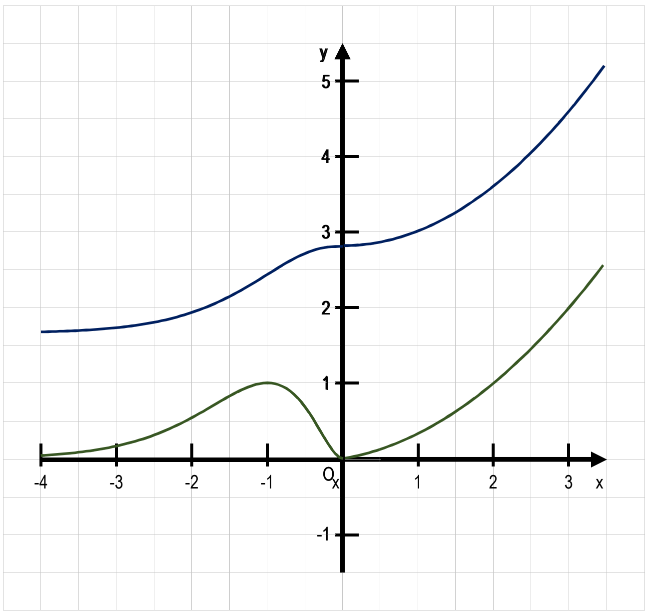
b) Graph siehe nebenstehendes Bild!



Aufgabe 4:

a) $T_h(2;-1)$, da G_g um drei Längeneinheiten nach rechts verschoben und an der x-Achse gespiegelt wird (Max. von g wird zum Min. von h).

b) Graph siehe nebenstehendes Bild!



Teil B:

zu Aufgabe 1:

a) Symmetrie und Schnittpunkt mit der y-Achse …

$$f(-x) = 2\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot(-x)^2} = 2\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2} = f(x) \rightarrow AS\ zur\ y-Achse$$

$$S_y\!: f(0) = 2\cdot \overbrace{e^{-\frac{1}{8}\cdot 0^2}}^{=1} = 2 \rightarrow S_y(0;2)$$

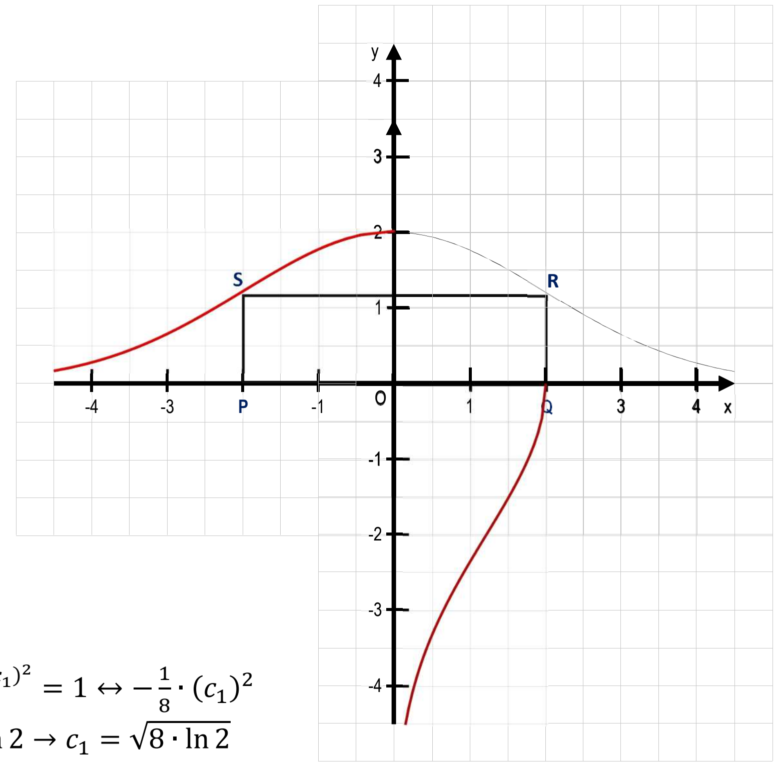
b) Zur Wendetangente …

$$y = f'(x_0)\cdot x + t\ \ mit\!: W\left(\overbrace{-2}^{=x_0}; 2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)\ \ und\ \ f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2}\ folgt\!:$$

$$2\cdot e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2) + t \rightarrow t = 4\cdot e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}}\cdot x + 4\cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

c) Zeichnung:



d) $[\overline{QR}] = f(c_1) = 2\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot(c_1)^2} = 1 \leftrightarrow -\frac{1}{8}\cdot(c_1)^2$
$= -\ln 2 \leftrightarrow (c_1)^2 = 8\cdot\ln 2 \rightarrow c_1 = \sqrt{8\cdot\ln 2}$

e) $[\overline{QR}] = f(c) = 2\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot(c)^2};\ \ [\overline{PQ}] = 2\cdot c;$

$$A(c) = [\overline{QR}]\cdot[\overline{PQ}] = 2\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot(c)^2}\cdot 2\cdot c = 4\cdot c\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot(c)^2}$$

f) $A'(c) = 4\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot(c)^2} - c^2\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot(c)^2} = (4 - c^2)\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot(c)^2} = 0 \rightarrow c_{1;2} = \pm 2;$

g) $f_k(x) = 2\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2} + k$; die Umkehrbarkeit folgt aus der (für x < 0) strengen Monotonie …

$$f'_k(x) = f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot x}_{\substack{>0\\ \forall x\in IR^-}}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2}}_{\substack{>0\\ \forall x\in IR}} \geq 0\ \ \forall x\in\ ]-\infty;0]$$

h) $f_k(x) = 2\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2} + k = f_k^{\,-1}(x) \leftrightarrow 2\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2} + k = x$
kein Schnittpunkt für $k \in\ ]-2;+\infty[$ (ist am Bild erkennbar)

zu Aufgabe 2:

a) Breite b = 8m und Höhe h = 2m können aus der Zeichnung abgelesen werden.

b) Der Graph von g(x) ist nach unten geöffnet und besitzt einen Flachpunkt oberhalb des Ursprungs; deshalb muss a < 0 und b > 0 sein!

c) Graph III kommt nicht in Frage, weil f(x) als Ableitungsfunktion von F(x) an den Extremwerten von G_F für x = $\pm$ 4 Nullstellen besitzen müsste.
Graph II kommt nicht in Frage, weil der zu berechnende Flächeninhalt deutlich größer als die für x = 4 ablesbaren F(4) = 1,8 [m^2] beträgt!

d) Der gesamte Flächeninhalt lässt sich mit Hilfe des Graphen durch $A = 2 \cdot F(4) \approx 10\,m^2$ abschätzen.
Beschreibung:
Berechne mit Hilfe der folgenden Gleichung den Wert von a:

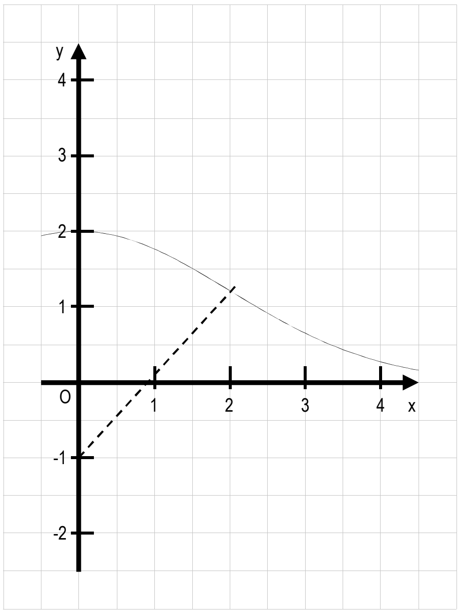
$$\int_{-\sqrt[4]{\left|\frac{1,50}{a}\right|}}^{+\sqrt[4]{\left|\frac{1,50}{a}\right|}} (a \cdot x^4 + 1,50)dx = 4\,m^2$$

e) Betrachte die nebenstehende Zeichnung:

$$\rightarrow L_P = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{45°} = \frac{3m \cdot \pi \cdot \left(90° - \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{45°} = 8,76\,m$$

$$\rightarrow L_P = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{45°} = \frac{3m \cdot \pi \cdot \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)}{45°} = 8,76\,m$$

$$\rightarrow L_P = \frac{1}{45°} \cdot 3m \cdot \pi \cdot \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{2}{1 + 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}\right)}_{\alpha} = 8,81\,m$$



Teil A:

Aufgabe 1:

a) $f(x)=\frac{e^x}{e^x-2}\ \ mit\ \ D_f=IR\backslash\{\ln 2\}\ und\ S_y(0;\,-1)$

b) $f'(x)=\frac{(e^x-2)\cdot e^x-e^x\cdot e^x}{(e^x-2)^2}=\frac{-2\cdot e^x}{(e^x-2)^2}$

Aufgabe 2:

a) $g(x)=\sqrt{x}+1;\ \ P(1;2)\ \ sowie\ \ g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\rightarrow m_t=g'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$

$y=m_t\cdot x+t\rightarrow t=\underbrace{y-m_t\cdot x}_{=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}\rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{2}$

b) $\sqrt{x}+1=y\leftrightarrow x=(y-1)^2\rightarrow g^{-1}(x)=(x-1)^2$

Aufgabe 3:

a) $f(x)=-x^2+2ax\rightarrow\int_0^{2a}f(x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+ax^2\right]_0^{2a}=\left[-\frac{8a^3}{3}+4a^3\right]-0=\frac{4a^3}{3};$

b) Klar ist, dass die y-Koordinate des Hochpunkts von G_f mit der Seitenlänge x_Q des Quadrats übereinstimmt!

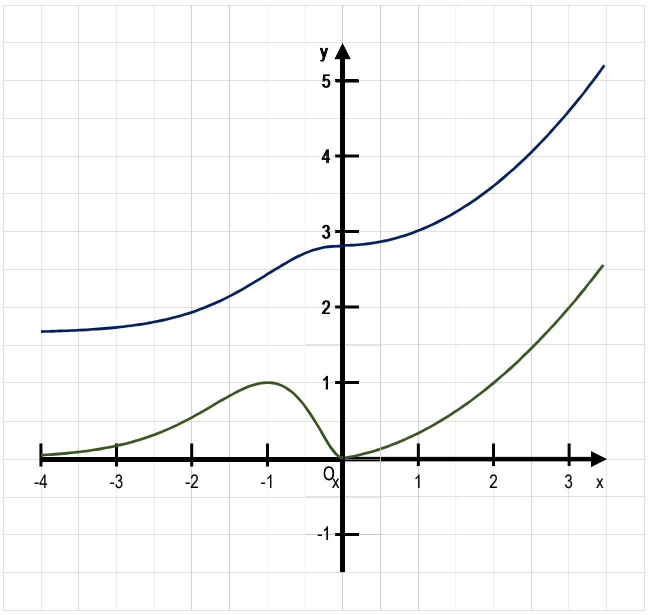
Dann gilt: $x_Q=f(a)=a^2\leftrightarrow A_Q=a^2\cdot a^2=a^4=\frac{4a^3}{3}=\int_0^{2a}f(x)\,dx\leftrightarrow a=\frac{4}{3}$

Für a = $^4/_3$ ist die vorgegebene Bedingung erfüllt!

Aufgabe 4:

c) $T_h(2;-1)$, da G_g um drei Längeneinheiten nach rechts verschoben und an der x-Achse gespiegelt wird (Max. von g wird zum Min. von h).

d) Graph siehe nebenstehendes Bild!



Teil B:

Aufgabe 1:

Geg.: $f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$

a) Es geht um die vier Nullstellen von f: $x_1 = 0;\ x_2 = 1{,}6;\ x_{3;4} = 4\ (ist\ doppelt)$; da es sich bei dem Term um eine ganzrationale Funktion vom Grade 4 handelt kann die Anzahl der Nullstellen (incl. ihrer Vielfachheit) den Wert vier nicht übersteigen.

b) Ist der Wert kleiner Null, so ist der Stau bereits in der Auflösung, d.h.: die Staulänge verkürzt sich …

c) Die Staulänge nimmt am stärksten zu, wenn die Änderungsrate der Staulänge maximal ist, d.h., wenn

$$f'(x) = (5x^2 - 16x + 8) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x}{4}\right)}_{\substack{x_{3;4}=4\ scheidet\ aus! \\ Stau\ komplett \\ aufgelöst!}} = 0$$

$$\rightarrow x_{5;6} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 160}}{10} \rightarrow \begin{cases} x_5 = \dfrac{8 - 2\sqrt{6}}{5} \approx 0{,}62\ [h] \\ x_5 = \dfrac{8 + 2\sqrt{6}}{5} \approx 2{,}58\ [h] \end{cases}$$

Da der entsprechende f(x) Wert positiv sein muss (es soll sich um ein Max. handeln) kommt für den Zeitpunkt nur x_5 in Frage.

d) Ist die Änderungsrate positiv, so nimmt die Staulänge zu. Dies ist bis $7.^{36}$ Uhr der Fall! Um $7.^{36}$ Uhr ist der Stau damit am längsten!

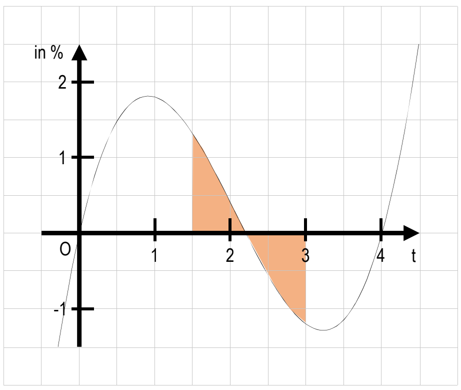
e) Die momentane Änderungsrate einer Funktion s(x) wird stets durch ihre erste Ableitung beschrieben. Für die Funktion s(x) gilt: $s'(x) = f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$ (das sieht man sofort). Da s(x) ebenfalls für $x_{3;4} = 4$ eine Nullstelle besitzt, folgen sofort die Behauptungen … (was soll man da noch rechnen?).

f) Zunahme der Staulänge:

$$\int_{0,5 \equiv 6.30\ Uhr}^{2\ \equiv 8.00\ Uhr} f(x)\,dx = s(2) - s\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (2)^3 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^3 = 2 - \left(\frac{7}{8}\right)^3 \approx 1{,}33\ [km]$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2) - s\left(\frac{1}{2}\right)}{1{,}5h} \approx 0{,}9\ \left[\frac{km}{h}\right]$$

g) Naja: Um $7.^{30}$ Uhr besitzt der Stau eine bestimmte Länge, die bis zu zweiten Nullstelle des Graphen bei etwa $8.^{12}$ Uhr noch zunimmt und die durch den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse ermittelt werden kann. Gesucht ist für eine geeignete Flächenbilanzierung ein Zeitpunkt $x_0 > 8.^{12}$ Uhr, für den der vom abgebildeten Graphen mit der x-Achse eingeschlossene Flächeninhalt ebenso groß ist wie der zwischen $7.^{30}$ Uhr und $8.^{12}$ Uhr eingeschlossene Flächeninhalt. Das ist gegen $9.^{00}$ Uhr der Fall (siehe Bild).



Aufgabe 2:

Geg.: $h_k(x) = (x-3)^k + 1$

a) Es sei n ∈ IN:

$$\lim_{x\to-\infty} h_k(x) = \lim_{x\to-\infty}[(x-3)^k + 1] = \begin{cases} -\infty \; für\; ungerades\; k\; wegen\; (-1)^{2n+1} = -1 \\ +\infty \; für\; gerades\; k\; \; wegen\; (-1)^{2n} = +1 \end{cases}$$

b) Ein bischen Nachdenken liefert …

$$\left.\begin{matrix} h_{k_1}(x) = (x-3)^{k_1} + 1 \\ h_{k_2}(x) = (x-3)^{k_2} + 1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{h_{k_1}(x)=h_{k_2}(x)} (x-3)^{k_1} = (x-3)^{k_2} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \leftrightarrow 1^{k_1} = 1^{k_2} = 1 \to (4;2) \\ x_2 = 3 \leftrightarrow 0^{k_1} = 0^{k_2} = 0 \to (3;1) \end{cases}$$

c) Wenn es sich um eine echte Tangente handeln soll (Ableitung ist linear), so muss k = 2 sein … damit folgt:

$$h_2(x) = (x-3)^2 + 1 \quad und \quad h'_2(x) = 2\cdot x - 6 = t(x)$$

Ist t Tangente an den Graphen G_{h2} so darf die beim Gleichsetzen entstehende quadratische Gleichung nur eine Lösung besitzen! Damit folgt:

$$(x-3)^2 + 1 = 2\cdot(x-3) \leftrightarrow (x-3)^2 - 2\cdot(x-3) + 1 = (x-4)^2 = 0$$

d.h.: die Aussage ist wahr!

d) Dass es sich bei den Vierecken um Trapeze handelt folgt sofort aus der Gleichheit der x-Werte von R und S sowie von P und Q (Parallelität der entsprechenden Seiten). Für k > 3 folgt zudem …

k ist gerade!

$$\left.\begin{matrix} \overline{P_kQ_k} = \left| \overbrace{2}^{h_k(4)} - \overbrace{k}^{h'_k(4)} \right| = (k-1) \\ \overline{R_kS_k} = \left| \overbrace{2}^{h_k(2)} - \overbrace{k(-1)^{k-1}}^{h'_k(4)} \right| = |(2+k)| = (k+2) \end{matrix}\right\} \to \underbrace{A_k = 2\cdot k}_{A_T = \frac{a+b}{2}\cdot h \;\; mit\; a||b}$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{P_{k+1}Q_{k+1}} = \left| \overbrace{2}^{h_{k+1}(4)} - \overbrace{(k+1)}^{h'_{k+1}(4)} \right| = (k-1) \\ \overline{R_kS_k} = \left| \overbrace{0}^{h_{k+1}(2)} - \overbrace{(k+1)}^{h'_k(4)} \right| = (k+1) \end{matrix}\right\} \to A_{k+1} = 2\cdot k$$

… gezeigt!

Teil A:

a) Hans versucht ein Lösungstupel vor der Durchführung des Experiments vorherzusagen. Betrachte Sie das folgende Ereignis L: „Keine Ziffer des 5-Tupels von Hans stimmt mit der an der gleichen Position stehenden Ziffer des durch das Werfen ermittelten 5-Tupels überein." Dann gilt für P(L):

$$P(L) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

b) Es sei E: „jede Zahl tritt auf". Eine von vier Ziffern muss dann doppelt auftreten → $Faktor\colon \binom{4}{1}$.

Sie können an jeder der fünf Positionen des 5-Tupels stehen → $Auswahl\ der\ Position\colon \binom{5}{2}$.

Die restlichen drei Ziffern unterscheiden sich paarweise!

Damit gilt zunächst für die Anzahl der Möglichkeiten: $\# = \binom{5}{2} \cdot \overbrace{\binom{4}{1} \cdot 1}^{\substack{Auswahl\ der\ doppelten \\ Zahl\ ist\ frei; dann\ fix}} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

und damit mit Hilfe des Laplace-WR:

$$P(E) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \left[\binom{4}{1} \cdot 1\right] \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4^5} = \binom{5}{2} \cdot \frac{4!}{4^5} = \binom{5}{2} \cdot \frac{3!}{4^4}$$

Teil B:

zu Aufgabe 1:

a) Binomialverteilung …

$$P(D) = \binom{200}{7} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^7 \cdot \left(\frac{24}{25}\right)^{193} + \binom{200}{8} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^8 \cdot \left(\frac{24}{25}\right)^{192} = 0{,}28436 \approx 28{,}44\%$$
$$P(E) = B(200; 0{,}65; k > 135) = 1 - B(200; 0{,}65; k < 136) = 0{,}20817 \approx 20{,}82\%$$

b) Unter 200 ausgewählten Fahrzeugen befinden sich höchstens 25 mit einem Verbrennermotor.

c) Erwartungswert und Varianz:

$$E(X) = n \cdot p;\ \ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \to E(X) = 200 \cdot 0{,}9 = 180;\ \ \sigma = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2} = 4{,}24$$

d) Optimierung:

$$Var(X) = n \cdot p \cdot q = n \cdot (p - p^2)$$
$$[Var(X)]' = n \cdot (1 - 2 \cdot p) = 0 \leftrightarrow p = \frac{1}{2} = q$$

e) Auswahl ohne Rücklegen (macht der TR nicht mit):

$$P(30; 10) = \frac{\binom{14000 \cdot 0{,}65}{30} \cdot \binom{14000 \cdot 0{,}25}{10}}{\binom{14000 \cdot 0{,}9}{40}} = 0{,}1336765882 \approx 13{,}36\%$$

oder:

Auswahl ohne Rücklegen:

$$B\left(40; \frac{5}{18}; 10\right) = \binom{40}{10} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^{10} \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^{30} = 13{,}34511648 \approx 13{,}35\%$$

zu Aufgabe 2:

Anzahl der PKW in Deutschland: $\frac{600.000}{0,012} = 50.000.000$

P(E := „rein elektrischer Antrieb“): $P(E) = \frac{320.000}{50.000.000} = \frac{32}{50000} = \frac{64}{100000} = 0,064\%$

$$B(n; 0,0064; k > 0) = 1 - B(n; 0,0064; k = 0) > 0,97 \leftrightarrow B(n; 0,0064; k = 0) < 0,03$$

$$0,9936^n < 0,03 \leftrightarrow n > \frac{\ln 0,03}{\ln 0,9936} = 546,14 \rightarrow n = 547;$$

Antwort:

Es müssen …

zu Aufgabe 3:

a) Die stochastische Unabhängigkeit vorausgesetzt gilt für das Ereignis $(\tilde{J} \cap B)$ …

	J	$\tilde{J}$	
A	0,48	0,32	0,8
B	0,12	0,08	0,2
	0,6	0,4	1

$$P(\tilde{J} \cap B) = 0,08 = 8,0\%$$

b) Es gilt:

	J	$\tilde{J}$	
A	0,5	0,3	0,8
B	0,1	0,1	0,2
	0,6	0,4	1,0

$$P_J(J \cap A) = \frac{P(J \cap A)}{P(J)} \rightarrow P_J(J \cap A) = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}$$

Teil A:

a) Mindestens zwei schwarze bedeutet … „genau zwei oder genau drei schwarze Kugeln“ befinden sich in der Urne … Damit folgt:

$$P(2s) + P(3s) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{12}{27} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27}$$

b) Das Ereignis E: „Es werden zwei schwarze Kugeln entnommen“ kommt auf zwei verschiedene Arten zustande …

Aus der Situation $2s$ durch … $\underbrace{\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}_{1x\ gelb\ und\ 2x\ schwarz} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\substack{1te\ ist \\ schw.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{2te\ ist \\ schw.}}$ oder (+)

aus der Situation $3s$ durch … $\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^3}_{3x\ schwarz} \cdot \underbrace{1}_{\substack{1te\ ist \\ schw.}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{2te\ ist \\ schw.}}$

und damit …

$$P(E) = \frac{12}{27} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{27} = \frac{4}{9}$$

Teil B:

Aufgabe 1:

Geg.: n = 20; p = 0,5;

Lsng.:

$$P(A) = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 7{,}40\%$$
$$P(B) = B(20; 0{,}5; 8 \leq k \leq 12) = B(20; 0{,}5; k \leq 12) - B(20; 0{,}5; k \leq 7) = 73{,}68\%$$

Aufgabe 2:

Summe der Zahlen kleiner als 3: C = {(0; 0), (0; 1), (1; 0), (0; 2), (2; 0), (0; 3), (0; 3), (1; 1), (1; 2), (2; 1)}

Produkt der Zahlen ist 2 oder 3: D = {(1; 2), (2; 1), (1; 3), (3; 1)}

$$P(C) = 10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} = 10{,}00\%$$
$$P(D) = 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{25} = 4{,}00\%$$
$$P(C \cap D) = 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{50} = 2{,}00\%$$
$$\rightarrow P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{250} \neq \frac{1}{50} = P(C \cap D)$$

Antwort: Die Ereignisse sind stochastisch abhängig!

Aufgabe 3:

a) $B(4;0{,}9;k=4)=\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^0=65{,}61\%$

b) Erwartungswert:

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{10}+61\cdot\frac{1}{10}+62\cdot\frac{1}{10}+\cdots+69\cdot\frac{1}{10}=(61+62+\cdots+69)\cdot\frac{1}{10}=$$
$$=\left(9\cdot 60+\sum_{k=1}^{9}k\right)\cdot\frac{1}{10}=58{,}50\ [€]$$

Empfehlung:

Kommt drauf an … wenn ein Risikoplayer empfiehlt, dann sollte der Spieler (der ist offensichtlich ein Risikoplayer) sicher nochmal drehen, da sich nichts Wesentliches zwischen Erwartungswert und bereits „erdrehter" Zahlung ändert.

Der „Nummer-Sicher"-Player wird empfehlen, das Spiel abzubrechen (Motto: Lieber eine Stumme im Bett, als eine Taube auf dem Dach).

Bemerkung: Würde man der Empfehlung der Musterlösung uneingeschränkt folgen, dann hätte man das Spiel in jedem Fall schon in der Vorrunde abbrechen müssen …, denn (den Best Case für die letzte Runde vorausgesetzt) es gilt …

$$E(X)=\left(9\cdot 51+\sum_{k=1}^{9}k\right)\cdot\frac{1}{10}=50{,}40<51\ [€]$$

c) Wir halten zunächst fest, dass die angegebene Formel für den Erwartungswert falsch ist! Denn folgt man der Idee aus Teilaufgabe 3b) zur Ermittlung von E(X), folgt …

$$E_1(X)=\left(0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{10}+\cdots+9\cdot\frac{1}{10}\right)=5\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{45}{10}=5\cdot 0{,}9$$

$$E_2(X)=\left(9\cdot 5\cdot 0{,}9+\sum_{k=1}^{9}k\right)\cdot\frac{1}{10}=\frac{9\cdot 5\cdot 0{,}9}{10}+5\cdot 0{,}9=5\cdot\left(1+\frac{10}{9}\right)\cdot 0{,}9^2=5\cdot\frac{19}{9}\cdot 0{,}9^2$$

$$E_3(X)=\left(9\cdot\left[5\cdot\frac{19}{9}\cdot 0{,}9^2\right]+\sum_{k=1}^{9}k\right)\cdot\frac{1}{10}=\frac{9\cdot\left[5\cdot\frac{19}{9}\cdot 0{,}9^2\right]}{10}+5\cdot 0{,}9=5\cdot\left(\frac{19}{9}+\frac{100}{81}\right)\cdot 0{,}9^3=5\cdot\frac{271}{81}\cdot 0{,}9^3$$

$$E_4(X)=\frac{9\cdot\left[5\cdot\frac{271}{81}\cdot 0{,}9^3\right]}{10}+5\cdot 0{,}9=5\cdot\left[1+\frac{10}{9}+\left(\frac{10}{9}\right)^2+\left(\frac{10}{9}\right)^3\right]\cdot 0{,}9^4=5\cdot\left[\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{10}{9}\right)^k\right]\cdot 0{,}9^4$$

…

$$E_n(X)=5\cdot\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{10}{9}\right)^k\right]\cdot 0{,}9^n=5\cdot\left[\frac{\left(\frac{10}{9}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{9}\right)}\right]\cdot 0{,}9^n=5\cdot\underbrace{\left[\left(\frac{10}{9}\right)^n-1\right]\cdot 9\cdot 0{,}9^n}_{\neq n\ für\ n>1}$$

Für die angegebene Formel gilt (tatsächlich ist Erwartungswert deutlich größer):

$$E_n(X)=5\cdot n\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

Nachweis der Behauptung:

$$E_n(X)=5\cdot n\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n=5\cdot(n+1)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}=E_{n+1}(X)$$
$$\leftrightarrow n=(n+1)\cdot\frac{9}{10}\leftrightarrow\frac{n}{n+1}=\frac{9}{10}\rightarrow\begin{cases}n=9\\ n+1=10\end{cases}$$

Für n = 9 und n = 10 stimmen die Erwartungswerte überein! Da es keine abweichende Lösung (siehe FF „Beachte") gibt, ist die Aussage richtig!

Beachte:
für n aus IN gilt insbesondere nicht …:
$E_n(X) = 5 \cdot n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n = 5 \cdot (n+2) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n+2} = E_{n+2}(X) \leftrightarrow \frac{n}{n+2} = \frac{81}{100}$ bzw. der Ansatz
für $E_{n+1}(X) = 5 \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} = 5 \cdot (n+2) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n+2} = E_{n+2}(X) \leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} = \frac{9}{10}$ führt wiederum zur angegebenen Lösung 9 und 10.

Aufgabe 4:

a) S: „Bei dreimaligem Drehen des Glücksrades werden genau zwei gleiche Zahlen erdreht"

$$P(S) = \underbrace{\binom{3}{2} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{5}}_{\substack{2\ gleiche \\ Zahlen\ mit \\ Berücksicht. \\ der\ Position}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} = 48\%$$

b) V: „Bei n-maligem Drehen sollen alle Zahlen verschieden sein"

$$P(V) = \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n!}{n^n}$$

Zusatzbedingung:

$$P(V) = \frac{n!}{n^n} < 0{,}01 \leftrightarrow n! < \frac{n^n}{100} \xrightarrow{ausprobieren} n = 7$$

Teil A:

c) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad in\ E: x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$\lambda + 1 + (1 - \lambda) = 2 + \lambda - \lambda = 2 \rightarrow g\ liegt\ in\ E$

d) $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad mit\ g\ gleichsetzen$ … (offensichtlich keine Parallelität)

$$h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{X}: g$$

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \cdot a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \mu = \lambda = 0 \\ 0 = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases} \quad geht\ nicht \rightarrow h_a\ windschief\ zu\ g$$

Teil B:

f) Aus dem Bild entnimmt man …

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = 7 \cdot \sqrt{2}; \quad \left|\overrightarrow{BF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = 7 \cdot \sqrt{2};$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}\ und\ \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow AB||EF$$

Es handelt sich um ein gleichschenkliges Trapez

g) $L: \vec{X} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} \quad mit\ \vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 133 \\ -133 - 0 \\ -133 - 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$NF: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0 \rightarrow KF:\ x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0;$$

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi \approx 55°$$

h) Hilfsgerade $s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\ wird\ mit\ der\ x_3 - Achse\ geschnitten$ …

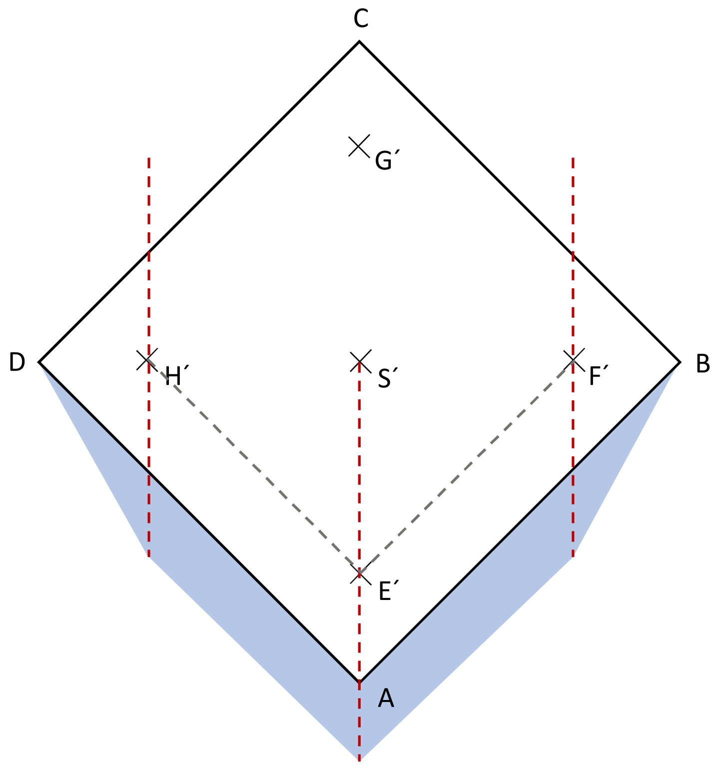
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda = \frac{19}{7}} S(0; 0; 19) \leftrightarrow k = 19$$

i) Das Dreieck MNS_{15} ist offensichtlich rechtwinklig. Wäre die Kathete $\overline{MS_{15}} = \overline{MN}$, so läge ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck vor und damit wäre der Neigungswinkel $\gamma = 45°$. Da aber gilt: $\overline{MS_{15}} < \overline{MN}$ ist $\gamma < 45°$. Zeichnung selbst machen!

j) Die Änderung der Höhe beträgt 4 LE; das sind 28 m. Das Trapez ABFE besitzt einen Neigungswinkel von 55° zur x_1x_2 – Ebene. Die das Dreieck EFS_{15} beinhaltende Ebene einen Neigungswinkel $\gamma < 45°$ zur x_1x_2 – Ebene. Der Unterschied dieser Winkel ist größer als 9°.

k) Hilfsgerade: $f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ muss mit der x_1x_2 – Ebene geschnitten werden! Dann gilt: $x_3 = 15 - 8 \cdot \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{15}{8} \rightarrow T\left(\frac{45}{2}; 0; 0\right)$

l) Schattenskizze:
Es handelt sich um Trapeze!



Teil A:

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}; \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$

$A \in g: \begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \rightarrow \mu = 2$ wahr!

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix}\right| = 6 \rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\varphi \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 6 \leftrightarrow C(7; 1; 1)$

$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\5\\5\end{pmatrix} \leftrightarrow C(9; 5; 5)$

Teil B:

a) $L: \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix}-3\\-3\\6\end{pmatrix} \quad mit: \vec{n} = \begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\-3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18-0\\0+36\\18+9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\36\\27\end{pmatrix}$

NF: $\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}\right] = 0 \rightarrow KF: \; 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 42 = 0$

b) Winkel: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{29}} \rightarrow \alpha = 56{,}15°$

c) Einfach …

d) $V_K = V_{Prisma} + V_{Pyramide} = A_{ABC} \cdot h_{pr} + \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot h_{py}$

$= \left(\frac{27}{2} \cdot 6 + \frac{9}{2} \cdot 6\right) VE = 108 \; VE$

e) Die Grenzlagen des Punktes P_k sind $P_0(1; 0; 0)$ (N_0 ist identisch mit der x_1x_3-Ebene) und $P_1(0;1;0)$ (N_1 ist identisch mit der oktantenhalbierenden Ebene des ersten Oktanten). Für den Wert $k = {}^1/_3$ liegt der Punkt A in der Ebene N_k und beinhaltet somit die Kante [AD]. Demzufolge gilt: Das größte Intervall für k wäre $]{}^1/_3; 1[$. Die betroffenen Kanten sind … [AB]; [DE]; [CB] und [EF].

f) $q: \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QF} \circ \overrightarrow{QR} = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix}-3\\-3\\12-\mu\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-6\\3\\2-\mu\end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow 33 - 14 \cdot \mu + \mu^2 = 0$

$\mu_{1;2} = \dfrac{14 \pm \sqrt{196-132}}{2} \rightarrow \begin{cases}\mu_1 = 11 \; (liegt\ nicht\ auf\ [AD] \\ \mu_2 = 3\end{cases}$

g) **S ist der Punkt auf [AB], der von C die kürzeste Entfernung besitzt (kann man noch draufkommen)!** Nach der Drehung wird der Punkt C mit T bezeichnet. Berechnen Sie die Koordinaten von T!

Ist insgesamt eine schwachsinnige Aufgabenstellung (wegen der Fremdbezeichnung T kaum zu knacken … warum nicht C oder C` anstelle von C?).*