Analysis
Aufgabengruppe 1

Geg.: $f(x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot x - x^2}$ mit $ID_f = [0; 10]$

a) Nullstellen:

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot x - x^2} = 2 \cdot \sqrt{(10 - x) \cdot x} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

b) Extremstelle:

$$f'(x) = -4 \cdot \frac{x-5}{2 \cdot \sqrt{10 \cdot x - x^2}} = -2 \cdot \frac{x-5}{\sqrt{10 \cdot x - x^2}} = 0 \rightarrow x_3 = 5 \rightarrow E(5; 10)$$

Es handelt sich um einen Hochpunkt, weil die y-Koordinate positiv ist und sich der Punkt zwischen den Schnittpunkten von f mit der x-Achse befindet.

c) Ist G_f rechtsgekrümmt auf ID_f, dann muss die zweite Ableitung auf ID_f negativ sein! Dies erfüllt nur der Term I.

d) Umformung:

$$f(5 - x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot (5 - x) - (5 - x)^2} = 2 \cdot \sqrt{-x^2 + 25}$$
$$f(5 + x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot (5 + x) - (5 + x)^2} = 2 \cdot \sqrt{-x^2 - 25}$$
$$f(5 - x) = f(5 + x)$$

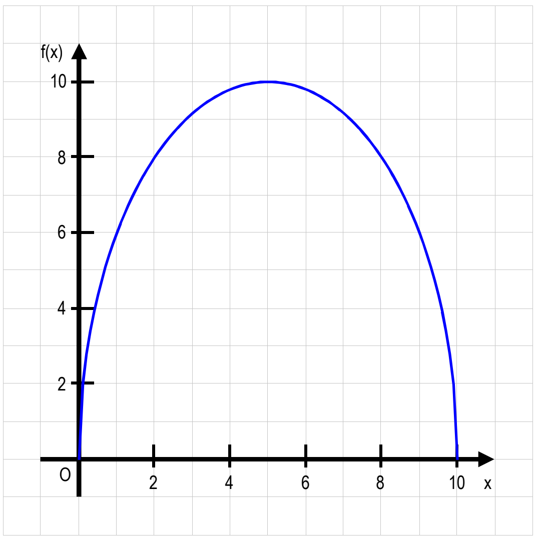
Die Funktionswerte, die um den Betrag von x von der Geraden x = 5 abweichen sind gleich; daraus folgt die Achsensymmetrie!

e) $ID_{f'}$:

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{x-5}{\sqrt{10 \cdot x - x^2}} \quad mit\ ID_{f'} =]0; 10[$$
$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left[-2 \cdot \frac{x-5}{\sqrt{10 \cdot x - x^2}} \right] \rightarrow +\infty$$

Die positive y-Achse ist Halbtangente an den Graphen G_f.

f) f(8) = 4
Graph siehe rechts …



g) Winkelgröße:

$$\tan \varphi = f'(2) = -2 \cdot \frac{-3}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow \varphi = 56{,}31°$$

h) Das Rechteck besitzt die Grundseite $l = 10 - 2 \cdot s$ und die Breite $b = f(s) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot s - s^2}$.
Damit ergibt sich für die Diagonalen d nach Pythagoras:

$$d^2 = l^2 + b^2 =$$
$$(10 - 2 \cdot s)^2 + \left[2 \cdot \sqrt{10 \cdot s - s^2} \right]^2 =$$
$$100 - 40 \cdot s + 4 \cdot s^2 + 4 \cdot (10 \cdot s - s^2) =$$
$$100 - 40 \cdot s + 4 \cdot s^2 + 40 \cdot s - 4 \cdot s^2 = 100$$
$$\rightarrow d = \sqrt{100} = 10$$

i) In einer Höhe von 3,6 m beträgt die Spritzweite 9,6m.

j) Spritzweite f(x) = 6m:

$$2 \cdot \sqrt{10 \cdot x - x^2} = 6 \rightarrow \sqrt{10 \cdot x - x^2} = 3$$
$$10 \cdot x - x^2 = 9 \leftrightarrow x^2 - 10 \cdot x + 9 = 0$$
$$\rightarrow (x-1) \cdot (x-9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 9 \end{cases}$$

Spritzweite ist maximal für x = 5 m (f´(x) = 0 aus A. b)).

k) g(t) = $^{dV}/_{dt}$:

$$\frac{dV}{dt} = g(t) = \frac{1}{4} \cdot t - 25 \rightarrow V(t) = \int g(t)dt = \frac{1}{8} \cdot t^2 - 25 \cdot x + c$$
$$V(60s) = \frac{1}{8} \cdot 60^2 - 25 \cdot 60 = -1050$$

Innerhalb der ersten Minute fließen 1050 Liter Wasser aus dem Bohrloch ab!

Analysis
Aufgabengruppe 2

Aufgabe 1:

a) Symmetrieverhalten, Nullstelle und Grenzwert:

$$f(x) = x \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}}}_{>0} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (eine\ NS)$$

$$PSzu\ U(0;0)\ wegen\ ... \quad f(-x) = (-x) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (-x)^2 + \frac{1}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}} = -f(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}}}_{\to 0} \right) = 0$$

b) Ableitung:

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}} + x \cdot (-x) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}} = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$$

c) Monotonieverhalten:

$$f'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}} = 0 \to \begin{cases} x_1 = -1 \to Min(-1;\ -1) \\ x_2 = +1 \to Max(+1;\ +1) \end{cases}$$

x	]-∞; -1[	-1	]-1; +1[	+1	]+1; +∞[
G_f	Streng monoton fallend	Minimum	Streng monoton steigend	Maximum	Streng monoton fallend

d) Integral:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}} \right) dx = \left[-e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{e} - 1$$

e) Interpretation:

$$F(w) - F(0) = \int_0^w \underbrace{f(x)}_{\substack{>0, \\ wenn \\ x>0}} dx = \int_0^{2022} f(x)dx + \underbrace{\int_{2022}^w f(x)dx}_{\approx 0}$$

Das zwischen 2022 und w zwischen x-Achse und Funktionsgraph eingeschlossene Flächenstück besitzt (egal wie groß auch immer w gewählt wird) einen nur geringfügig von Null abweichenden Flächeninhalt (das uneigentliche Integral von Null bis Unendlich existiert und besitzt den Wert Eins!). Damit folgt:

$$F(w) - F(0) \approx \int_0^{2022} f(x)dx \approx 1$$

Aufgabe 2:

a) $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot a\cdot x^2+\frac{1}{2}}$ mit a $\in$ IR.

$$f(1) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}} = 1 \leftrightarrow -\frac{1}{2}\cdot a + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow a = 1$$

b) Die Gerade $f_0(x) = x \cdot \sqrt{e}$ mit der Steigung $\sqrt{e}$ ist eine Ursprungsgerade ($S_y(0; 0)$).

c) Aussagen:

I. Alle Funktionen der Schar verlaufen durch den Ursprung des Koordinatensystems
II. Die Steigung von G_{f_a} besitzt im Ursprung den Wert $\sqrt{e}$
III. Alle Scharfunktionen schneiden sich nur im Ursprung des Koordinatensystems

d) $$f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot a\cdot x^2+\frac{1}{2}} \xrightarrow[\text{in } x- \text{ und } y-\text{Richtung}]{\text{Streckung um } k} k \cdot f_a\left(\frac{x}{k}\right) = k \cdot \frac{x}{k} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^2+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= x \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{k^k}\cdot x^2+\frac{1}{2}\right)} = f_{\frac{a}{k^k}}(x)$$

e) Gruppe I: a > 0, denn in diesem Fall besitzt $a \cdot x^2 = 1$ zwei Nullstellen!
Gruppe II: a ≤ 0, denn in diesen Fällen besitzt $a \cdot x^2 = 1$ keine Nullstellen!

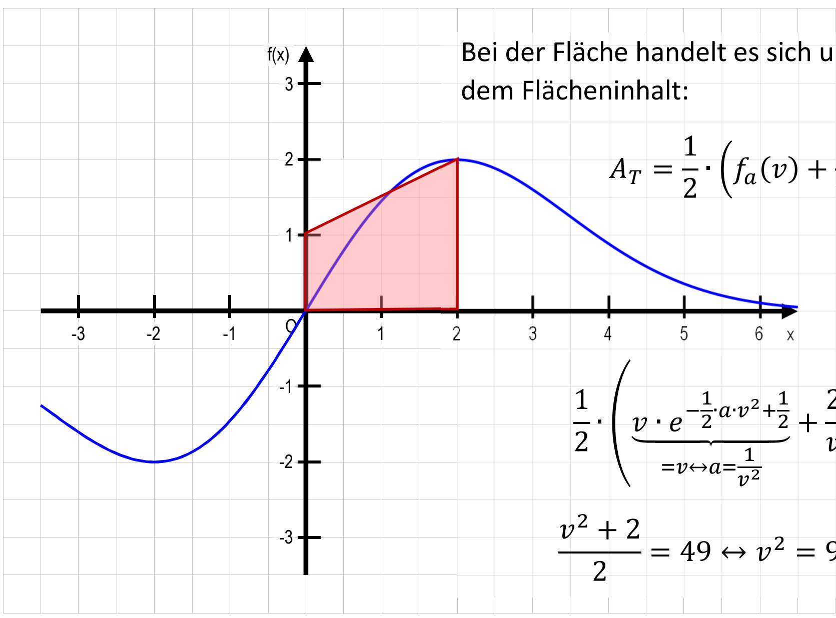
f) Ortskurve der Extremstellen: $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot a\cdot x^2+\frac{1}{2}} \rightarrow f'_a(x) = (1 - a\cdot x^2)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot a\cdot x^2+\frac{1}{2}} = 0$

$$1 - a \cdot x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}} \rightarrow E\left(\underbrace{\pm\sqrt{\frac{1}{a}}}_{=x}; \underbrace{\pm\sqrt{\frac{1}{a}}}_{=y}\right)$$

Aus Symmetriegründen genügt es sich auf die positive x-Achse zu beschränken:

$$x = \sqrt{\frac{1}{a}} \xRightarrow[\text{nach } a]{\text{auflösen}} a = \frac{1}{x^2} \quad \text{in } y \text{ einsetzen}: y = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}}} = \sqrt{x^2} = x$$

g) Skizze:



Bei der Fläche handelt es sich um ein Trapez mit dem Flächeninhalt:

$$A_T = \frac{1}{2}\cdot\left(f_a(v) + \frac{2}{v}\right)\cdot v$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{v \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot a\cdot v^2+\frac{1}{2}}}_{=v \leftrightarrow a=\frac{1}{v^2}} + \frac{2}{v}\right)\cdot v = 49$$

$$\frac{v^2+2}{2} = 49 \leftrightarrow v^2 = 96 \rightarrow a = \frac{1}{96}$$

Stochastik
Aufgabengruppe 1

Aufgabe 1:

a) Vierfeldertafel:

	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\overline{B}}$	**Summe**
$\boldsymbol{U}$	0,14	0,56	0,70
$\boldsymbol{\overline{U}}$	0,06	0,24	0,30
Summe	0,20	0,80	1

$$P(B\ ) \cdot P(U) = 0{,}70 \cdot 0{,}20 = 0{,}14 = P(B \cap U) \rightarrow B \text{ und } U \text{ sind stoch. unabhängig}$$

b) Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(\overline{U}) = \frac{P(\overline{U} \cap B)}{P(B)} \rightarrow P_B(\overline{U}) = \frac{0{,}06}{0{,}20} = 0{,}30 = 30\%$$

Antwort: …

Aufgabe 2:

a) Tabelle:

k	0	1	2	3
$P(Z = k)$	$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$

b) Gewinnplan:

k	0	1	2	3
X	-3 €	-1 €	1 €	3 €
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X) = -3\ € \cdot \frac{1}{3} - 1\ € \cdot \frac{1}{3} + 1\ € \cdot \frac{1}{4} + 3\ € \cdot \frac{1}{12} = -\frac{5}{6}\ €$$
$$E(n \cdot X) = n \cdot E(X) = -n \cdot \frac{5}{6}\ € = -300\ \ € \rightarrow \mathrm{n} = 360$$

c) Auszahlungstabelle:

k	0	1	2	3
Y	0 €	2 €	4 €	6 €
$P(Y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$$P(\text{"}mindestens\ 4\ €\text{"}\ ) = \frac{1}{3}$$

E: „Es müssen mehr als zweimal mindestens 4 € ausbezahlt werden“

$P(E) = B\left(8; \frac{1}{3}; k > 2\right) = 1 - B\left(8; \frac{1}{3}; k \leq 2\right) = 1 - 0{,}46822 = 0{,}53178$

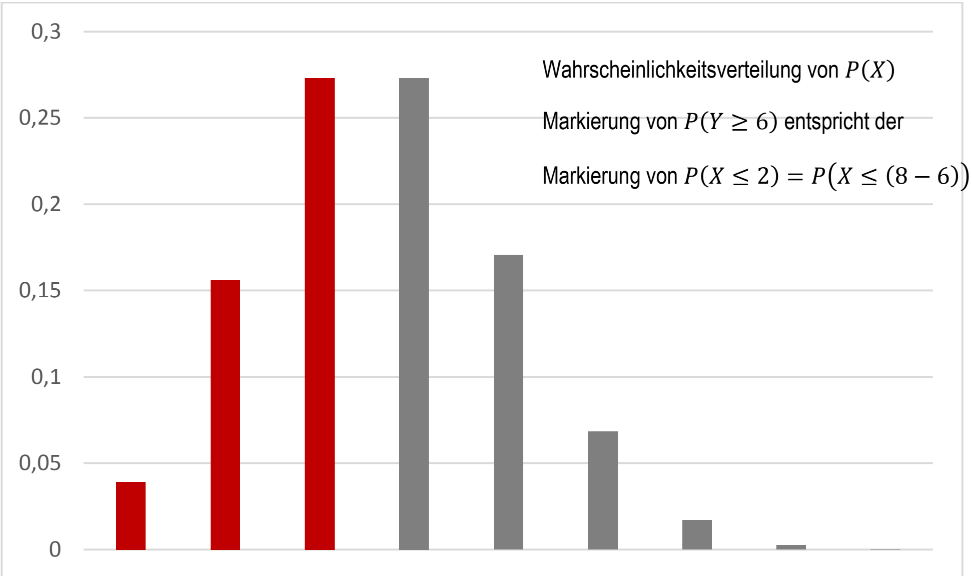
d) $P(V) = 6 \cdot P(2€) \cdot P(4€) \cdot P(6€) = 6 \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 12} = \frac{1}{24}$

Aufgabe 3:

a) $\sigma = \sqrt{8 \cdot p_x \cdot (1 - p_x)} = \frac{4}{3} \rightarrow 8 \cdot p_x \cdot (1 - p_x) = \frac{16}{9} \leftrightarrow -p_x^2 + p_x - \frac{2}{9} = 0$

$$p_x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}}}{-2} = \frac{-1 \pm \frac{1}{3}}{-2} \rightarrow \begin{cases} p_{x,1} = \frac{1}{3} \\ p_{x,1} = \frac{2}{3} = (1 - p_{x,1}) \end{cases}$$

b) Markierung:



Stochastik
Aufgabengruppe 2

Aufgabe 1: (auch mit Tafelwerk lösbar)

c) $P(E_1) = B(15; 0{,}05; k = 0) = \binom{15}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{15} = 46{,}33\%$
$P(E_2) = B(15; 0{,}05; k \leq 2) =$
$= \binom{15}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{13} = 96{,}38\%$
$P(E_3) = B(15; 0{,}05; k = 12\ oder\ 13) =$
$= \binom{15}{12} \cdot 0{,}05^{12} \cdot 0{,}95^3 + \binom{15}{13} \cdot 0{,}05^{13} \cdot 0{,}95^2 = 0$

d) $B(n; 0{,}05; k \geq 1) = 1 - B(n; 0{,}05; k = 0) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow B(n; 0{,}05; k = 0) \leq 0{,}01$
$\Leftrightarrow 0{,}95^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}95} = 89{,}78 = 90$
Es müssen mindestens 90 Pflanzen untersucht werden!

e) Geg.: n = 400; $E(X_{400}) = 400 \cdot 0{,}05 = 20$; $VAR(X_{400}) = 400 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 19$; $\sigma = \pm 4{,}36$;

$$E(X_{400}) - \sigma \leq X \leq E(X_{400}) + \sigma$$

$$20 - 4{,}36 \leq X \leq 20 + 4{,}36$$

$$16 \leq X \leq 24 \leftrightarrow 0{,}04 = \underbrace{\frac{16}{400}}_{h_{r,min}} \leq \frac{X}{400} \leq \underbrace{\frac{24}{400}}_{h_{r,max}} = 0{,}06$$

f) $P(E(X) - k \cdot \sigma < X < E(X) + k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ ist eine Abschätzung für die Mindestwahrscheinlichkeit bei einer Abweichung der Zufallsvariablen X um das k-fache ihrer Standardabweichung von ihrem Erwartungswert. Speziell für k = 2:

$$P(E(X) - 2 \cdot \sigma < X < E(X) + 2 \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{4} = 75\%$$

Aufgabe 2:

c) Vierfeldertafel:

	S	$\bar{S}$	Summe
T	x	45-3x	19
$\bar{T}$	105-x	3x	131
Summe	105	45	150

$$x + 45 - 3 \cdot x = 19 \leftrightarrow -2 \cdot x = -26 \leftrightarrow \boldsymbol{x = 13}$$

d) Bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} \rightarrow P_S(T) = \frac{13}{105} = 12{,}38\%$$
$$P_{\bar{S}}(T) = \frac{P(\bar{S} \cap T)}{P(\bar{S})} \rightarrow P_{\bar{S}}(T) = \frac{2}{15} = 13{,}33\%$$

Der Unterschied der Wahrscheinlichkeit zwischen dem Befall der unbehandelten Pflanzen mit dem tropischen Pilz ist nicht signifikant größer als der Befall der behandelten Pflanzen!

Geometrie
Aufgabengruppe 1

a) $[PQ] = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\9\\-18\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\-19\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{18} = 3\cdot\sqrt{2}$

$\left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\7\\-17\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\-19\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3$

$\left|\overrightarrow{QR}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\7\\-17\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\9\\-18\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3$

Pythagoras: $\left|\overrightarrow{PR}\right|^2 + \left|\overrightarrow{QR}\right|^2 = 3^2 + 3^2 = 18 = \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2$ Damit folgt: $[PQ]$ ist Hypotenuse des Dreiecks PQR, das damit insbesondere bei R rechtwinklig ist. Nach dem Satz von Thales folgt insbesondere auch, dass $[PQ]$ Durchmesser des Umkreises von Dreieck PQR ist!

b) $E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\7\\-17\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} + \varphi\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \to \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+4\\-4+1\\2+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$

$NF_E\colon \begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}3\\7\\-17\end{pmatrix}\right] = 0 \to KF_E\colon\ 6\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 6\cdot x_3 + 105 = 0$

$oder\colon\ 2\cdot x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 + 35 = 0$

g in KF_E:

$2\cdot(-12+\lambda) - (11 + 2\cdot\lambda) + 2\cdot 0 + 35 = -35 + 2\cdot\lambda - 2\cdot\lambda + 35 = 0$, d.h.: g liegt in E.

c) Die x_3 – Komponente der Geraden ist Null, daraus folgt die Behauptung.

d) $\vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \to \alpha = \cos^{-1}\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}{1\cdot 3} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 48{,}19°$

e) g entspricht in der Zeichnung der Uferlinie. Gesucht ist der Abstand des Ursprungs von der Geraden g!

Hilfsebene H:

$$NF_H\colon \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0 \to KF_H\colon\ x_1 + 2\cdot x_2 = 0$$

g in HNF_H:

$$(-12+\lambda) + 2\cdot(11 + 2\cdot\lambda) = 5\cdot\lambda + 10 = 0 \to \lambda = -2$$

$$\to d(O;g) = \left|\begin{pmatrix}-14\\7\\0\end{pmatrix}\right| = 7\cdot\sqrt{5} \approx 15{,}65m$$

f) Hilfsgerade k: $k\colon \vec{X} = \varepsilon\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\varepsilon\end{pmatrix}$

$$d(K;E) = \left|\frac{2\cdot 0 - 0 + 2\cdot\varepsilon + 35}{3}\right| = 3 \to \begin{cases}\varepsilon_1 = -13\\ \varepsilon_2 = -22\end{cases}$$

ε_2 scheidet aus, da man nicht unter den Meeresboden tauchen kann!

g) Wenn die Kamera den Abstand 3m vom Meeresboden besitzt und senkrecht dazu steht, dann gilt für den Durchmesser d des Grundkreises des Kegels: d = 6m (da er ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit dem Punkt K bildet). Da d > $3\cdot\sqrt{2}$ ist, können alle drei Seesterne auf einem Foto festgehalten werden!

Geometrie
Aufgabengruppe 2

a) Die Punkte B und C besitzen die gleiche x_3- Koordinate, liegen also in einer Parallelebene zur x_1x_2-Ebene, die den Normalenvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ besitzt. Für die anderen Koordinaten gilt $x_2 = -x_1$.
Aufgrund der Betragsgleichheit dieser Werte liegen die Punkte symmetrisch zur x_3 – Achse.

b) $$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-11\\11\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\11\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix}\right| = 2\cdot\sqrt{317}$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}11\\-11\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-11\\11\\28\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}22\\-22\\0\end{pmatrix}\right| = 22\cdot\sqrt{2}$$
$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\begin{pmatrix}-11\\-11\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\-11\\28\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-22\\0\\-28\end{pmatrix}\right| = 2\cdot\sqrt{317}$$
$$\rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right| = 4\cdot\sqrt{317} + 22\cdot\sqrt{2} = 102{,}33m$$

c) $$E:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}11\\11\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix} + \varphi\cdot\begin{pmatrix}0\\-22\\28\end{pmatrix} \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-22\\28\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+616\\0+616\\484\end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix}$$
$$NF_E:\ \begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}11\\11\\0\end{pmatrix}\right] = 0 \rightarrow KF_E:\ 14\cdot x_1 + 14\cdot x_2 + 11\cdot x_3 - 308 = 0$$

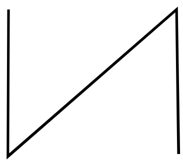
d) $$\vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ \vec{n} = \begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix} \rightarrow \varphi = \cos^{-1}\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix}}{1\cdot3\cdot\sqrt{57}} = \cos^{-1}\left(\frac{11}{3\cdot\sqrt{57}}\right) = 60{,}94°$$

Aufgrund der vorliegenden Symmetrie bildet die Ebene F natürlich den gleichen Winkel mit der x_1x_2-Ebene. Die Punkte A und D bilden mit dem Mittelpunkt der Strecke [CB] ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basiswinkel genauso groß wie φ sind. Damit gilt für den Schnittwinkel zwischen E und F:
$$\sphericalangle(E;F) = 180° - 2\cdot\varphi$$

e) Verhältnis:
$$\left.\begin{aligned} V_Q &= G_Q\cdot h_Q \\ V_P &= \frac{1}{3}\cdot G_P\cdot h_P \end{aligned}\right\} \xrightarrow[G_P=\frac{1}{2}\cdot G_Q]{h_Q=h_p} \frac{V_P}{V_Q} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot G_Q\cdot h_Q}{G_Q\cdot h_Q} = \frac{1}{6}$$

f) Vektor zu Abb. 3: $\begin{pmatrix}0\\-1\\14\end{pmatrix}$ Vektor zu Abb. 4: $\begin{pmatrix}1\\-1\\28\end{pmatrix}$

Schematische Ansicht von Oben:



g) Der Punkt Q liegt auf der Strecke [A; B] (Bedingung I); P liegt auf der x_3 – Achse. Nach II muss [PQ] senkrecht auf [AB] stehen (kürzeste Abstand – Bedingung). III legt fest, dass der Abstand von P zur Strecke [AB] dem Abstand von P zur Strecke [CB] entspricht. Aufgrund der Symmetriebedingung des Polygons ist dies auch der Abstand von P zu [CD].