Analysis
Aufgabengruppe 1

zu Aufgabe 1:

a)

$$f(x) = \frac{6x}{x^2-4} \quad mit \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{6x}{x^2-4}\right) = 0$$

$$\rightarrow x - Achse\ ist\ waagrechte\ Asymptote$$

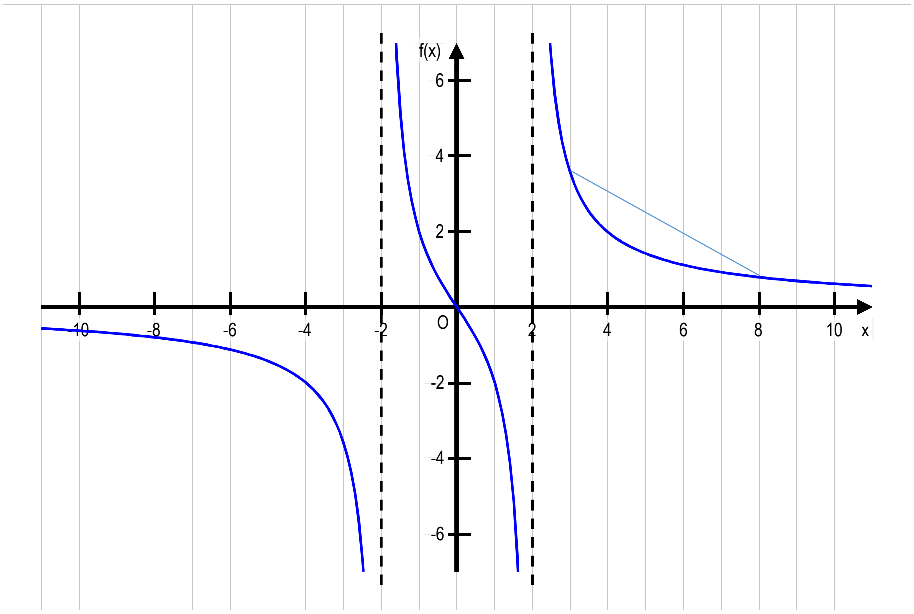
$$x = -2\ und\ x = 2\ sind\ die\ senkrechten\ Asymtoten$$

b) Monotonieverhalten:

$f'(x) = -\frac{6x^2+24}{(x^2-4)^2} < 0$ für alle x aus ID_f, d.h. G_f ist streng monoton fallend auf allen drei Intervallen!

Aus: $f'(0) = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$ ergibt sich die Steigung der gesuchten Tangenten

c) Graph:



d) Flächeninhalt:

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2}\cdot(y_A + y_B)\cdot(x_B - x_A) \rightarrow A_{Trapez} = \frac{1}{2}\cdot 4{,}4\cdot 5 = 11\ [FE]$$

$$\int_3^8 f(x)dx = \int_3^8 \left(\frac{6x}{x^2-4}\right)dx = [3\cdot\ln(x^2-4)]_3^8 = 3\cdot(\ln(60)-\ln(5)) = 3\cdot\ln 12\ [FE]$$

$$A_{gesucht} = A_{Trapez} - \int_3^8 f(x)dx = 11 - 3\cdot\ln 12\ [FE]$$

zu Aufgabe 2:

a) $f_{a,b,c}(x) = \frac{ax+b}{x^2+c} \rightarrow f(x) = \frac{6x}{x^2-4}$ $mit: a = 6; b = 0; c = -4;$

b) Für a = 0 und b ≠ 0 gibt es im Zähler von $f_{a,b,c}$ keine Nullstellen und damit auch keine Nullstellen der Funktion selbst (keine SP mit der x-Achse). Zudem gilt: Der Zähler ist achsensymmetrisch zur y – Achse und der Nenner ist achsensymmetrisch zur y-Achse, d.h. $G_{f...}$ ist ebenfalls achsensymmetrisch zur y-Achse.

c) a ∈ IR\{0}; b = 0; c ∈ IR;

d) $f'_{a,b,c}(x) = -\frac{ax^2+2bx-ac}{(x^2+c)^2} = 0 \leftrightarrow ax^2 + 2bx - ac = 0 \leftrightarrow x_{1;2} = \frac{-2b\pm\sqrt{4b^2+4a^2c}}{2a}$

Es gibt genau zwei Nullstellen der ersten Ableitung, wenn $4b^2 + 4a^2c > 0$, dies ist für die angegebenen Bedingungen stets erfüllt!:

Fälle (nicht notwendig, aber interessant):

i. Ist a = 0 dann gibt es keine Extremstellen (Nullstellenterm nicht definiert)!
ii. Ist a ≠ 0, b = 0 und c = 0 dann gibt es keine Extremstellen (Ableitung für x = 0 nicht definiert)!
iii. Ist a ≠ 0, b ≠ 0 und c = 0 dann gibt es nur eine Extremstelle (Ableitung für x = 0 nicht definiert)!
iv. Ist …
v. Ist …
vi. Ist a ≠ 0 und c > 0, dann ist $4b^2 + 4a^2c > 0$ (zwei Extremstellen)

zu Aufgabe 3:

a) $h(x) = \frac{5}{x^2+4}$; $p(x) = \frac{40}{(x-12)^2+4}$

Zunächst wird G_h um 12 LE in Richtung der positiven x–Achse verschoben. Der dann entstandene Graph wird noch um den Faktor 8 in Richtung der y-Achse getreckt! Da G_h nach Aufgabe 2b) symmetrisch zur y-Achse (x = 0) ist, liegt der Graph G_p damit symmetrisch zur Geraden (x = 12).

b) $p(x) = \frac{40}{(x-12)^2+4} < 4 \rightarrow (x-12)^2 + 4 > 10 \leftrightarrow (x-12)^2 > 6 \leftrightarrow x > 12 + \sqrt{6}$

$$x \approx 14{,}449 = 14\,h\;26\,min\;56\,sek \rightarrow 14\,h\;27\,min$$

c) Die Wendestelle gibt den Zeitpunkt des maximalen Leistungsanstiegs am Vormittag an!

d) Es soll graphisch der Flächeninhalt zwischen G_p und der x–Achse auf dem Intervall I = [10; 14] ermittelt werden (Kästchenzählen) …

exakte Rechnung:

$$\int_{10}^{14} \frac{40}{(x-12)^2+4}dx = \int_{-2}^{2} \frac{40}{x^2+4}dx =$$

$$= 40 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \arctan\frac{x}{2}\right]_{-2}^{2} = 20 \cdot \left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 10 \cdot \pi = 31{,}42\ \ [kWh]$$

d.h.: Der Hauseigentümer erhält 3 € 14 ct für die eingespeiste Energie!

Was natürlich blanker Unsinn ist, … weil nach der Rechtsverordnung für die Energieerzeugung im privaten Haushalt dem Energieerzeuger pro kWh mindestens 27% mehr netto vergütet werden muss, als der durchschnittliche Energiepreis im entsprechenden Verwaltungsgebiet beträgt (derzeit 28,26 ct). Im Raum Bamberg würde der Hauseigentümer also mit einer Summe von $11€\ 28\ ct$ *rechnen dürfen!*

Analysis

Aufgabengruppe 2

zu Aufgabe 1:

a) $f(x) = (1 - x^2) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = +1 \end{cases}$

b) $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$

$$\rightarrow f'(x) = (-2 \cdot x) \cdot e^{-x} - (1 - x^2) \cdot e^{-x} = (x^2 - 2 \cdot x - 1) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0 \leftrightarrow x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

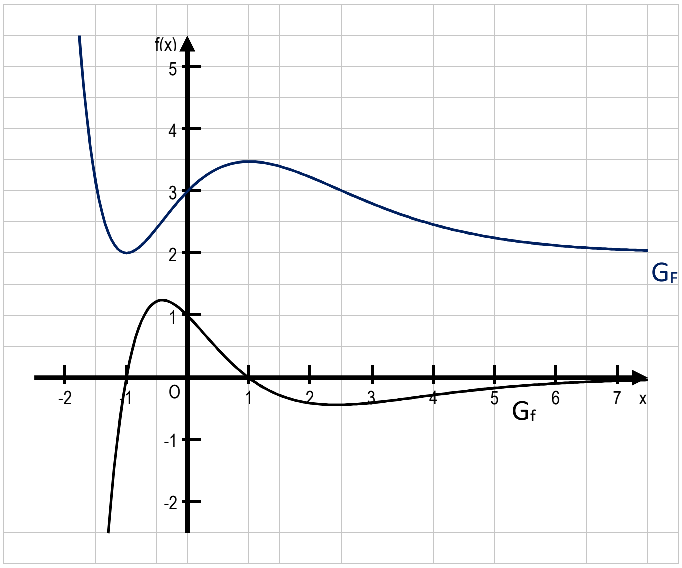
c) $\int_{-1}^{4} f(x)dx \approx 0{,}5$ durch Kästchenzählen unter Berücksichtigung der Bilanzierung (4 Kästchen entsprechen einer Flächeneinheit)!

Exakter (nicht verlangt) …

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = [(x+1)^2 \cdot e^{-x}]_{-1}^{4} = \frac{25}{e^4} - 0 = 0{,}4579$$

d) G_f ist links von -1 kleiner als Null (G_F streng monoton fallend) und rechts von -1 größer als Null (G_F streng monoton steigend), d.h. bei T besitzt G_F einen Tiefpunkt!

e) Graphen (siehe rechts):



f) $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \approx \left|\int_1^{2,5} f(x)dx\right|$

g) $h_k(x) = (1 - k \cdot x^2) \cdot e^{-x}$

Für:

$k > 0$: zwei Nullstellen

$k \leq 0$: keine Nullstelle

h) $0 = (1 - k \cdot x^2) \cdot e^{-x} \rightarrow$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{k}};\ x_2 = \sqrt{\frac{1}{k}};$$

$$\sqrt{\frac{1}{k}} - \left(-\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 4$$

$$2 \cdot \sqrt{\frac{1}{k}} = 4 \leftrightarrow \frac{1}{k} = 4 \leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

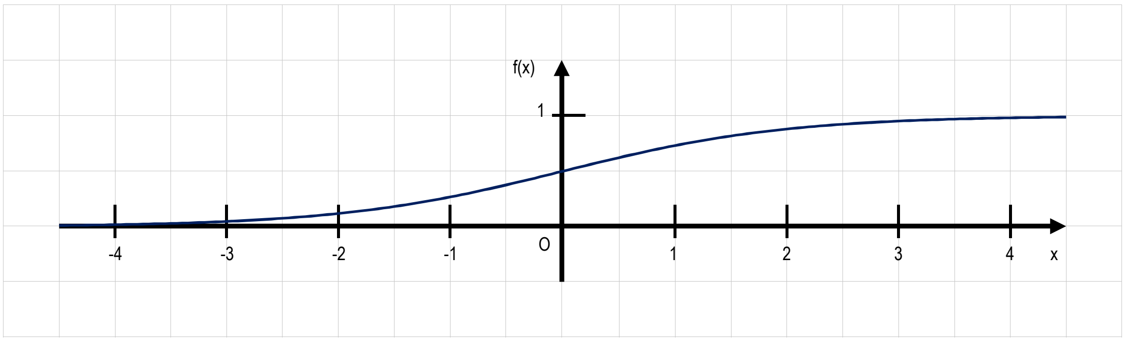
i) Nein, da das „+“–Vorzeichen von 1 im Term $(1 - k \cdot x^2)$ nicht von k abhängt!

zu Aufgabe 2:

a) $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$ $\quad mit\colon\ g'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ $\Rightarrow$ G_g ist streng monoton steigend!

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right) &= 1-1 = 0^+\\ \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right) &= 1-0 = 1^-\end{aligned}\right\} \to W =]0;1[$$

b) $g'(0) = \frac{1}{4}$;



c) $g(x) = \frac{2\cdot e^x}{e^x+1} - 1$

d) $\int_{-ln3}^{b} g(x)dx = \int_{-ln3}^{b}\left[\frac{e^x}{e^x+1}\right]dx = [\ln(e^x+1)]_{-ln3}^{b} = 2\cdot[\ln(e^x+1)]_{-ln3}^{0}$

$$[\ln(e^x+1)]_{-ln3}^{b} = \ln(e^b+1) - \ln\frac{4}{3}$$

$$2\cdot[\ln(e^x+1)]_{-ln3}^{0} = 2\cdot\left(\ln 2 - \ln\frac{4}{3}\right) = 2\cdot\ln 2 - 2\cdot\ln\frac{4}{3}$$

$$\ln(e^b+1) - \ln\frac{4}{3} = 2\cdot\ln 2 - 2\cdot\ln\frac{4}{3} \leftrightarrow \ln(e^b+1) = \ln 4 - \ln\frac{4}{3} = \ln 3$$

$$\leftrightarrow e^b + 1 = 3 \leftrightarrow b = \ln 2$$

Stochastik

Aufgabengruppe 1

zu Aufgabe 1:

A: „Alle vier Familien bezahlen an paarweise unterschiedlichen Kassen“

B: „Alle vier Familien bezahlen an derselben Kasse“

zu Aufgabe 2:

a) „mindestens 25 Bollerwagen werden ausgeliehen“ …

$$B(200;\ 0{,}15; k \geq 25) = 1 - B(200;\ 0{,}15; k \leq 24) = 1 - 0{,}13682 = 86{,}318\%$$

b) „die fünfte Familie ist die erste, die einen BW ausleiht“ …

$$0{,}85^4 \cdot 0{,}15 = 7{,}83\%$$

c) Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p \rightarrow E(X) = 200 \cdot 0{,}15 = 30$

$$B(200;\ 0{,}15; 30 - k \leq X \leq 30 + k) \geq 0{,}75$$

$$B(200;\ 0{,}15; X \leq 30 + k) - B(200;\ 0{,}15; X \leq 29 - k) \geq 0{,}75$$

$$\xrightarrow{Tafelwerk} k = 6 \rightarrow X \in [24; 36]$$

zu Aufgabe 3:

ω	N_0	N	K	E
X	0	0	28 €	36 €
$P(X)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{160}{360}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{k}{360}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{e}{360}$

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot \frac{k}{360} \cdot 28\ € + \frac{1}{6} \cdot \frac{e}{360} \cdot 36\ € == \frac{1}{6} \cdot \frac{k}{360} \cdot 28\ € + \frac{1}{6} \cdot \frac{200 - k}{360} \cdot 36\ €$$

$$\frac{k \cdot 28\ €}{2160} + \frac{(7200 - k \cdot 36)\ €}{2160} = 3\ € \leftrightarrow \frac{(7200 - k \cdot 8)\ €}{2160} = 3\ €$$

$$k = \frac{2160 \cdot 3\ € - 7200\ €}{-8\ €} = 90° \ \ und \ \ e = 110°;$$

zu Aufgabe 4:

a) $1 - \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} = 96{,}0\ \%$

b) $P(\text{"}drei\ verschiedene\ Motive\text{"}) = \frac{\overbrace{n}^{irgend-\ ein\ Motiv}}{n} \cdot \frac{\overbrace{(n-1)}^{alle\ bis\ auf\ das\ erste}}{n} \cdot \frac{\overbrace{(n-2)}^{alle\ bis\ auf\ die\ ersten\ beiden}}{n} = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}$

c) $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2} = \frac{n^2-3n+2}{n^2} > 0{,}9 \leftrightarrow 0{,}1 \cdot n^2 - 3n + 2 > 0 \rightarrow n > \frac{3+\sqrt{8{,}2}}{0{,}2} = 29{,}3$

$$\rightarrow n = 30;$$

Stochastik

Aufgabengruppe 2

zu Aufgabe 1:

E: „Es werden drei gleichfarbige Gummibärchen gezogen“.

$$P(E) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{120}$$

zu Aufgabe 2:

d)

$$B\left(50;\ \frac{1}{4}; k \geq 17\right) = 1 - B\left(50;\ \frac{1}{4}; k \leq 16\right) = 1 - 0{,}90169 = 9{,}831\%$$

e) F: „Das erste oder das zweite oder das dritte oder das vierte Gummibärchen ist das erste rote Gummibärchen“

f) Anteil der gelben Gummibärchen:

$$B(50;\ p; k \geq 1) = 1 - B(50;\ p; k \geq 1) = 1 - (1-p)^{50} \geq 0{,}95$$
$$(1-p)^{50} \leq 0{,}05 \leftrightarrow p \geq 1 - \sqrt[50]{0{,}05} = 5{,}8155\ldots\% = 5{,}82\%$$

zu Aufgabe 3:

	R	$\bar{R}$	Σ
V	0,42·x	0,58·x	x
$\bar{V}$	3·x – 0,63	0,63	3·x
Σ	3,42·x – 0,63	0,58·x + 0,63	1

a) $4 \cdot x = 1 \rightarrow x = 0{,}25 \rightarrow P(\bar{R}) = 0{,}58 \cdot \frac{1}{4} +\ 0{,}63 = 77{,}5\%$

b) $P_{\bar{V}}(R) = \frac{P(\bar{V} \cap R)}{P(\bar{V})} \rightarrow P_{\bar{V}}(R) = \frac{0{,}12}{0{,}75} = 16\%$

c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit gibt an, dass eine aus dem Sortiment entnommene nicht vegane Tüte nicht zuckerreduziert ist!

zu Aufgabe 4:

a) $E(X) = 0 \cdot p_0 + p_1 + 0{,}7 = 1 \rightarrow p_1 = 0{,}3\ und\ p_0 = 0{,}4;$

b) $VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \rightarrow VAR(X) = 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 - 1 = 1;$

c) $\sigma_{rel} = \frac{\sqrt{VAR(X)}}{E(X)} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{20} \leftrightarrow n = 400;$

Geometrie

Aufgabengruppe 1

a) $\left|\overrightarrow{SA}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{45} = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\overrightarrow{SB}\right|$

$$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}$$

Da $x_3 = 4$ konstant ist liegt die Ebene E parallel zur x_1x_2 – Ebene

b) Zur Ebene F:

$$F: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix} \quad mit \;\; \vec{n} = \begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\-18\\36\end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$F_{KF}: \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = 0 \leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 + 2 = 0$$

c) $V_P = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{G}_{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2} \cdot \underbrace{h}_{=3} \rightarrow V_P = \frac{1}{3} \cdot \left|\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}\right|^2 \cdot 3 = \sqrt{72}^2 = 72 \quad [VE]$

d) Der Kugelradius entspricht der kürzesten Entfernung von M zu F. Damit folgt:

$$A(X;F) = \frac{x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 + 2}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right|} = \frac{x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 + 2}{\sqrt{6}}$$

$$\rightarrow A(M;F) = \left|\frac{0 + 0 - 2 \cdot 4 + 2}{\sqrt{6}}\right| = \sqrt{6} = r_K \rightarrow d_k = 49\;cm$$

e) Höchster Punkt: 4 dm + $\sqrt{6}$ dm ≈ 64,5 cm

f) Schnittpunkt von L_t mit F:

$$(t+1) + (t+1) - 2 \cdot (6{,}2 - 5 \cdot (t - 0{,}2)^2) + 2 = 0$$

$$5 \cdot t^2 - t - 4 = 0 \rightarrow t_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{10} = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -0{,}8 \notin IR_0^+ \end{cases}$$

$$\rightarrow P(2;2;3)$$

g) $x_3(t) = 6{,}2 - 5 \cdot (t - 0{,}2)^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel t = 0,2 und x_3 = 6,2 < 64,5 cm, d.h. der höchste Punkt des Wasserstrahl liegt nicht höher als der höchste Punkt des Brunnens!

h) $V_W = V_P - \frac{V_K}{2} \rightarrow V_W = 72 \cdot 10^3 cm^3 - \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{6} \cdot 10\right)^3 \cdot \pi = 41218{,}8\;cm^3 = 41218{,}8\;ml$

$$\rightarrow T_{Füllung} = \frac{41218{,}8\;ml}{80\,\frac{ml}{s}} = 515{,}24\;s \approx 8\;min\;35\;s = 515\;s$$

Geometrie / Aufgabengruppe 2

a) rechter Winkel:

$$\overrightarrow{FA}\circ\overrightarrow{FB} = \begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix} = -25+9+16=0 \leftrightarrow \overrightarrow{FA}\perp\overrightarrow{FB}$$

b) Ebene:

$$W:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}+\varphi\cdot\begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}\ \ mit\ \ \vec{n}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\40\\30\end{pmatrix}\,\widehat{=}\,\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$W_{KF}:\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\circ\left[\vec{X}-\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right]=0\leftrightarrow 4\cdot x_2+3\cdot x_3-20=0$$

Die x_1 – Achse liegt parallel zur Ebene W.

c) Schnittwinkel von W mit der x_1x_2-Ebene:

$$\cos\alpha=\frac{n_W\circ n_{x_1x_2}}{|n_W|\cdot|n_{x_1x_2}|}\to\alpha=\cos^{-1}\frac{\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{5\cdot 1}=53{,}13^\circ$$

d) Zu K:

$$K\in h:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}+\rho\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\-4\end{pmatrix}\to|\overrightarrow{KE}|=|\overrightarrow{FE}|\to\left|k\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\-4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\right|$$

$$\to k\cdot 5\sqrt{2}=2\sqrt{2}\to k=\frac{2}{5}\to K\left(\frac{16}{5};\ -2;\ \frac{12}{5}\right)\leftrightarrow K(3{,}2;\ -2;\ 2{,}4)$$

e) Das Dreieck KFE ist gleichschenklig mit der Basis [KF]. Ist N der Mittelpunkt von [KF],, dann ist die Strecke von E nach N natürlich die Winkelhalbierende des Winkels KFE bei E und weil $K\in h$ und $D\in h$ ist diese Strecke auch Winkelhalbierende des Winkels DFE bei E. Zudem gilt: $u:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}+\vartheta\cdot\begin{pmatrix}-0{,}4\\0\\-0{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ \ f\text{ür}\ \ \vartheta=5$, d.h. der Ursprung S des KKS liegt auf der Geraden EN.

f) Gesamtvolumen:

$$V_{ges}=4\cdot V_{HDES}+4\cdot V_{ABFS}+V_{EFGHS}$$

$$V_{EFGHS}=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h\to V_{EFGHS}=\frac{1}{3}\cdot 8\cdot 4=\frac{32}{3}$$

$$V_{ges}=4\cdot\frac{40}{3}+4\cdot\frac{100}{3}+\frac{32}{3}=\frac{592}{3}=197\frac{1}{3}\ \ [VE]$$

g) Kugelmittelpunkt:

M muss aus Symmetrieüberlegungen auf der x_3 – Achse liegen. Zudem gilt: $|\overrightarrow{ME}|=|\overrightarrow{MD}|$

$$\left|\begin{pmatrix}2\\0\\4-m_3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}5\\-5\\-m_3\end{pmatrix}\right|\leftrightarrow\sqrt{20-8\cdot m_3+m_3^2}=\sqrt{50+m_3^2}$$

$$\to 20-8\cdot m_3=50\to m_3=-\frac{15}{4}\to M\left(0;0;\ -\frac{15}{4}\right)$$