Analysis

Aufgabengruppe 1 / A

zu Aufgabe 1:

$$f_1(x) = \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 - 4} \rightarrow ID = IR \backslash \{\pm 2\}; x_n = \frac{-3}{2};$$
$$f_2(x) = \ln(x+2) \rightarrow ID =]-2; +\infty[; x_n = -1;$$

zu Aufgabe 2:

Die Funktion $f(x) = x^3$ besitzt einen Terassenpunkt (waagrechte Tangente, aber keine Extremstelle). Verschiebt man die Funktion um 2 LE nach rechts und um 1 LE nach oben erhält man den gesuchten Term … $f(x) = (x-2)^3 + 1$

zu Aufgabe 3:

$f(x) = -x^3 + 9 \cdot x^2 - 15 \cdot x - 25$

$f'(x) = -3 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 15$

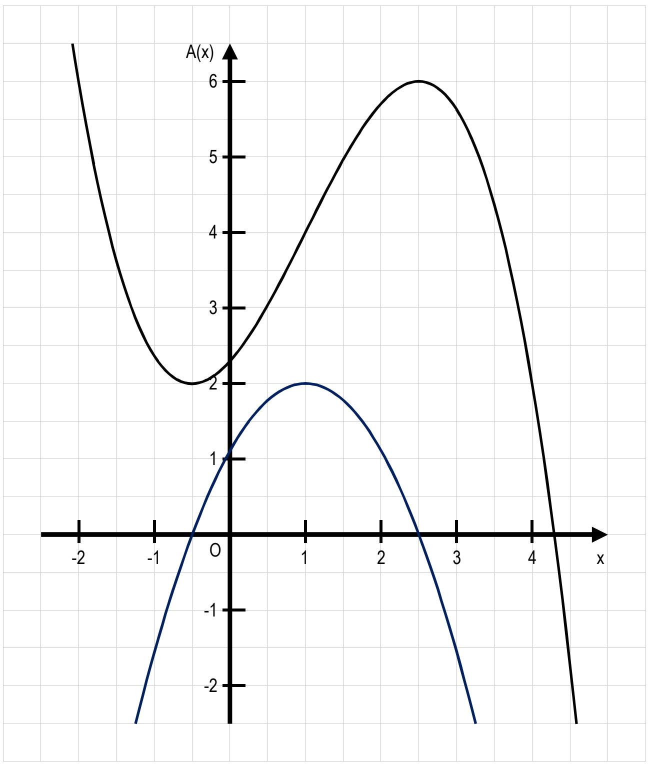
(1) $f'(0) = -3 \cdot 0 + 18 \cdot 0 - 15 = -15 \rightarrow Beh.$

(2) $\left.\begin{array}{r} f(5) = -5^3 + 9 \cdot 25 - 15 \cdot 5 - 25 = 225 - 225 = 0 \\ f'(5) = -3 \cdot 25 + 18 \cdot 5 - 15 = 90 - 90 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Beh.$

(3) $\left.\begin{array}{l} f'(-1) = -3 \cdot 1 - 18 - 15 = -36 \\ \underbrace{0}_{f(-1)} = -36 \cdot (-1) + t \rightarrow t = 36 \end{array}\right\} \rightarrow Beh.$

zu Aufgabe 4:

$f'(1) \approx 2$



zu Aufgabe 5:

siehe AG 2 / A

Analysis

Aufgabengruppe 1 / B

zu Aufgabe 1:

a) $f(x) = 2 \cdot ((\ln x)^2 - 1) = 0 \leftrightarrow (\ln x)^2 = 1 \rightarrow \ln x = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = e^{-1} = \frac{1}{e} \\ x_2 = e^{+1} = e \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{4 \cdot \ln x}{x} = 0 \leftrightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow TIP(1; -2)$$

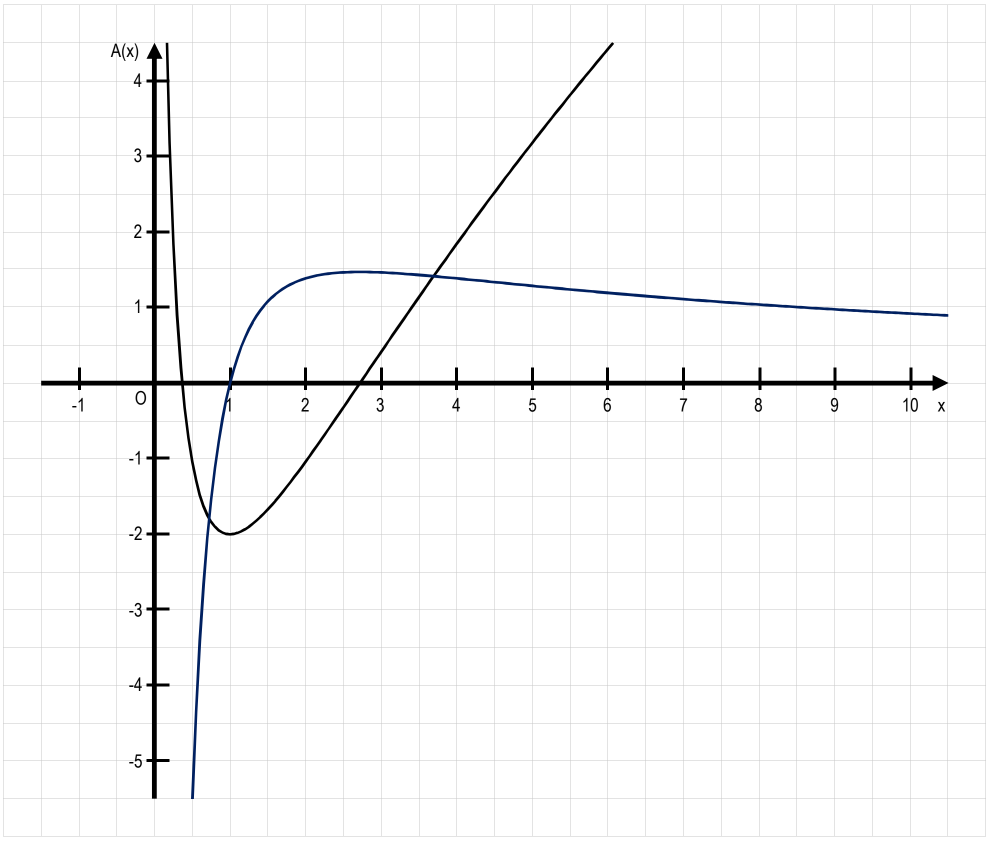
b) $f''(x) = \frac{4 - 4 \cdot \ln x}{x^2} = 0 \leftrightarrow 4 - 4 \cdot \ln x = 0 \leftrightarrow \ln x = 1 \leftrightarrow x = e \rightarrow W(e; 0)$

$$y = m \cdot x + t \quad mit\colon \; m = f'(e) = \frac{4}{e} \rightarrow y = \frac{4}{e} \cdot x - 4$$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4 \cdot \ln x}{x} = " - \infty"$, weil der G_f für x gegen Null (x > 0) gegen $" + \infty"$ strebt und damit die Tangentensteigung negativ sein muss und immer kleiner wird!

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4 \cdot \ln x}{x} = 0$, weil die natürliche Logarithmusfunktion wesentlich langsamer wächst als die Funktion g(x) = x.

$f'(0{,}5) = -5{,}5;\; f'(10) = 0{,}9;$



d) Der erste Wert ist e^{-1} selbst; der zweite Wert liegt bei etwa 5, da es beim angegebenen Integral um eine Flächenbilanz geht!

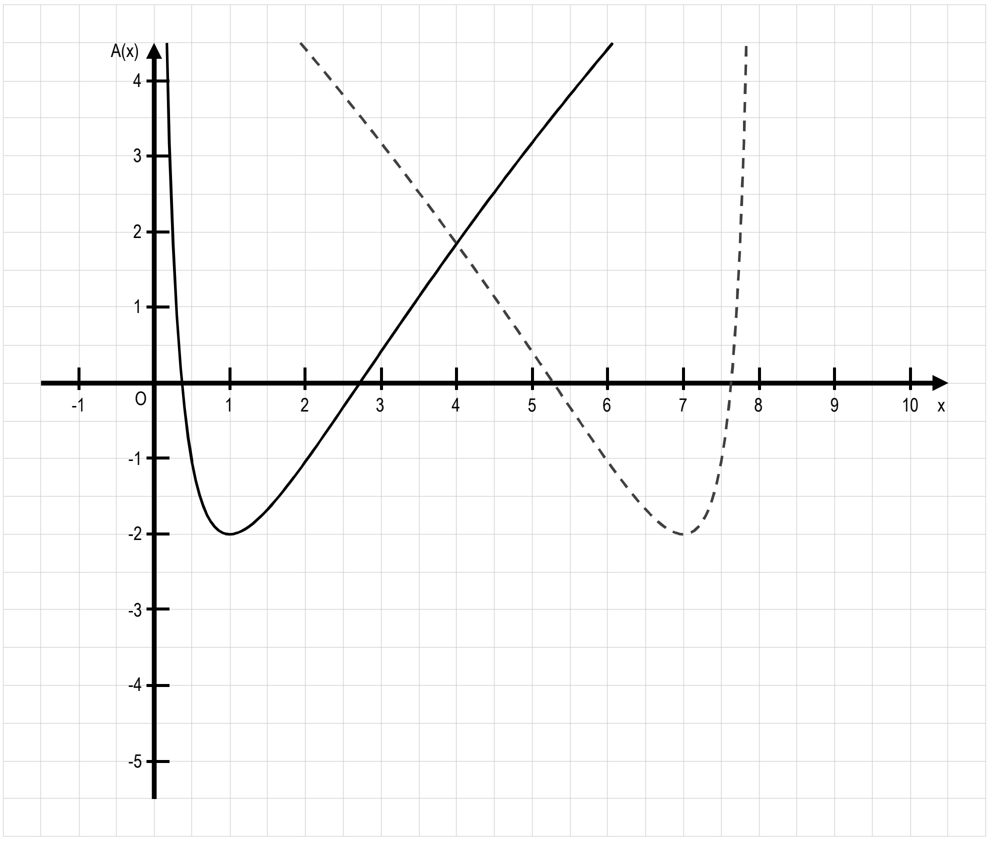
e) Vertikale Asymptote: x = 0 (wegen ID_h); schräge Asymptote: $y = \frac{3}{2} \cdot x - 4{,}5;$

f) $\left| \int_1^2 \left(\frac{3}{2} \cdot x - 4{,}5 + \frac{1}{x} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{3}{4} \cdot x^2 - 4{,}5 \cdot x + \ln x \right]_1^2 \right| = \left| \ln 2 - 6 + \frac{15}{4} \right| = \left| \ln 2 - \frac{9}{4} \right|$

$$\rightarrow Abweichung\ in\ \%\colon \; A = \frac{1{,}623 - 1{,}557}{1{,}623} = 4{,}1\%$$

zu Aufgabe 2:

a) Graph G_g:



b) Eine Spiegelung an der y-Achse wird durch die Multiplikation des Arguments mit (-1) realisiert. Danach wird der Graph um 8 nach rechts verschoben, d.h.:

$$g(x) = f\left(\underbrace{(-1)}_{=a} \cdot x + \underbrace{8}_{=b}\right) \to g(x) = 2 \cdot \left((\ln(8-x))^2 - 1\right)$$

c) Überlegungen zum Steigungsdreieck liefern …

$$m(4) = f'(4) = \frac{4 \cdot \ln 4}{4} = \ln 4 \to \varphi = 2 \cdot (90° - \tan^{-1}(\ln 4)) = 71{,}61°$$

d) größtmögliche Wassertiefe des Aquariums: $|f(0{,}2) - f(1)| = 5{,}18\ m$

e) $V_{Aquarium} = 24 \cdot \int_{0,2}^{4}\big(f(0{,}2) - f(x)\big)dx$

$$= \underbrace{2}_{\substack{Wegen\ der\ Symmetrie \\ von\ G_g\ und\ G_f}} \cdot \left[\underbrace{12}_{Höhe} \cdot \underbrace{\int_{0,2}^{4}\big(f(0{,}2) - f(x)\big)dx}_{\substack{Grundfläche\ G\ die\ von\ der\ Seite \\ mit\ dem\ Rand\ f\ begrenzt\ wird}}\right]$$

Analysis

Aufgabengruppe 2 / A

zu Aufgabe 1:

$$f(x) = \sqrt{3x-5} \;\; mit{:}\; ID_f = \left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$$

$$f'(x) = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3x-5}} \to f'(3) = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3 \cdot 3 - 5}} = \frac{3}{4} = m$$

$$f(3) = 2 \to P(3/2)$$

$$y = mx + t \to 2 = \frac{3}{4} \cdot 3 + t \to t = -\frac{1}{4} \to t{:}\; y = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{4}$$

zu Aufgabe 2:

$$f(x) = -x^3 + 9 \cdot x^2 - 15 \cdot x - 25 \to f'(x) = -3x^2 + 18 \cdot x - 15$$

$$(1){:}\;\; f'(0) = -15 \quad (w)$$

$$(2){:}\;\; f'(5) = -75 + 90 - 15 = 0$$

$$sowie{:}\;\; f(5) = -125 + 225 - 75 - 25 = 0 \quad (w)$$

$$(3){:}\;\; f'(-1) = -3 - 18 - 15 = -36 = m$$

$$sowie{:}\;\; t = f(-1) - (-36) \cdot (-1) = 0 + 36 \quad (w)$$

zu Aufgabe 3:

Aufgrund der Öffnung der Parabel besitzt die Integralfunktion drei Nullstellen: Für x = 3 liegt (per Definition der Integralfunktion) eine Nullstelle vor, die zugleich Wendepunkt (mit Vorzeichenwechsel, wegen G_F ist streng monoton steigend im Intervall I =]1,5; 4,5[) der Integralfunktion ist. Für x = 1,5 besitzt F ein Minimum und für x = 4,5 ein Maximum. Da G_f monoton fallend außerhalb von I ist, muss die x-Achse zwei weitere Male gekreuzt werden!

zu Aufgabe 4:

a) Wegen a > 0 kommt aufgrund von Grenzwertüberlegungen für x gegen Plus/Minus Unendlich nur der Graph in Abbildung 2 in Frage.

b) Es gilt:

$$f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x \to f_a'(x) = \frac{3}{a} \cdot x^2 - 1 \;\; mit{:}\;\; f_a'(3) = \frac{27}{a} - 1 = 0 \to a = 27$$

Für a = 3 ist die Extremwertbedingung erfüllt!

Analysis / Aufgabengruppe 2 / Teil B

zu Aufgabe 1:

a) $f(x) = a \cdot x \cdot (x-5) \cdot (x-10)$ mit: $f(1) = a \cdot (-4) \cdot (-9) = 2$

$folgt \ldots a = \frac{1}{18} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 15 \cdot x^2 + 50 \cdot x)$

b) $f'(x) = \frac{1}{18} \cdot (3 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 50) \rightarrow f''(x) = \frac{1}{18} \cdot (6 \cdot x - 30) \rightarrow f'''(x) = \frac{1}{3} \neq 0$

$f''(x) = \frac{1}{18} \cdot (6 \cdot x - 30) = 0 \leftrightarrow x = 5 \rightarrow W_{ep}(5,0)$

$f'(5) = \frac{1}{18} \cdot (75 - 150 + 50) = -\frac{25}{18} = m \rightarrow t = y - m \cdot x = 0 + \frac{125}{18}$

Wendetangente: $y = -\frac{25}{18} \cdot x + \frac{125}{18}$

c) G_g ist punktsymmetrisch zum Ursprung (nur ungerade Exponenten bei x) und besitzt dort insbesondere auch einen Wendepunkt (da dort definiert!). Der Graph wird um 5 LE nach rechts verschoben; es entsteht der Graph von G_f, der selbstverständlich ebenfalls punktsymmetrisch – diesmal zum Punkt W(5 / 0) – sein muss (also dem Wendepunkt)! Zudem gilt:

$g(x) = \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 25 \cdot x) \rightarrow f(x) = \frac{1}{18} \cdot \left((x-5)^3 - 25 \cdot (x-5)\right)$

d) Die Funktion F_1 besitzt auf I = [0; 10] die Nullstellen $x_1 = 1$ (obere und untere Integrationsgrenze identisch) und $x_2 = 9$ (wegen Flächenbilanz bei Punktsymmetrie von f zu W).

e) Auf dem Intervall I_{01} = [9; 10[verläuft G_f unterhalb der x-Achse, für größere Werte von x oberhalb. Da $F_1(9) = 0$ (siehe d)) muss für x > 10 aufgrund von Flächenbilanzüberlegungen eine weitere Nullstelle vorliegen!

f) Siehe Argumentation von e) für eine Nullstelle für x < 0. Höchstens vier Nullstellen, weil $F_1(x)$ als Stammfunktion eines Polynoms dritten Grades vierten Grades ist und damit höchstens vier Nullstellen besitzen kann (im vorliegenden Fall genau vier Nullstellen besitzt).

g) Modellierung: Es muss sich um eine Sinusfunktion mit der Periodenlänge 10 LE handeln.

Es folgt: $h(x) = A \cdot sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right) \rightarrow \int_0^5 A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right) dx = \left[-\frac{5 \cdot A}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)\right]_0^5 = \frac{625}{72}$

$\left[-\frac{5 \cdot A}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)\right]_0^5 = \frac{10 \cdot A}{\pi} = \frac{625}{72} \rightarrow A = \frac{125}{144} \cdot \pi$

$h(x) = \left(\frac{125}{144} \cdot \pi\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)$

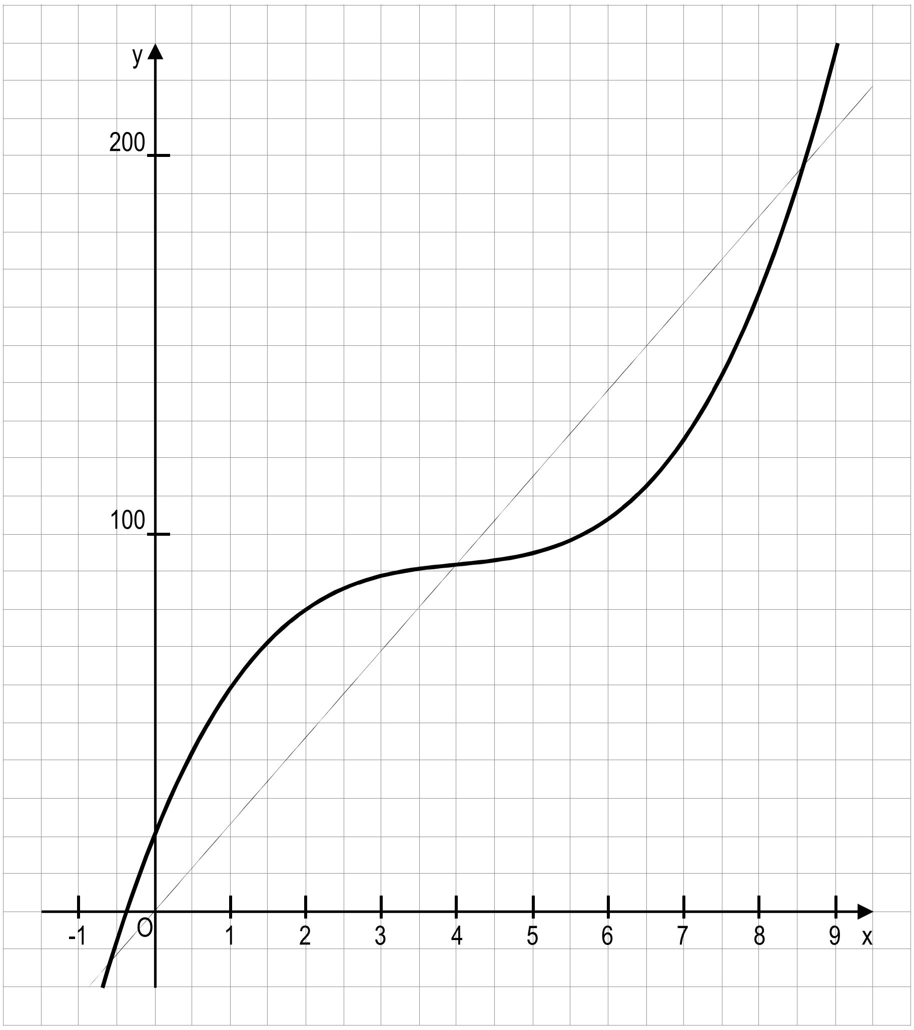
zu Aufgabe 2:

a) α) Bei 7 m^3 hergestellter Flüssigkeit betragen die Produktionskosten 125.000 €.

β) G_K ist streng monoton steigend, d.h. mit zunehmender Produktionsmenge steigen die Kosten stets an!

b) $G(4) = 23 \cdot 4 - 4^3 + 12 \cdot 4^2 - 50 \cdot 4 - 20 = 92 + 128 - 220 = 0$

c) Graphen:



Die verkaufte Menge muss im Bereich G =] 4m^3 ; 8,6 m^3 [liegen.

d) $G(x) = -x^3 + 12 \cdot x^2 - 27 \cdot x - 20 \rightarrow G'(x) = -3 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 27$

$G'(x) = -3 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 27 = 0 \Leftrightarrow x_{\max Gewinn} = \dfrac{-24 - \sqrt{252}}{-6} = 4 + \sqrt{7}$

Der maximale Gewinn liegt bei 6,65 m^3 verkaufter Flüssigkeit (beim zweiten Extremwert handelt es sich um den größten Verlust, da im Bereich V =]0 m^3 ; 4 m^3[die Erlösfunktion unter der Kostenfunktion verläuft!).

Stochastik / Aufgabengruppe 1 / Teil A

zu Aufgabe 1:

a) Vierfeldertafel:

	H	$\overline{H}$	Σ
STA	1600	600	2200
$\overline{STA}$	800	3000	3800
Σ	2400	3600	6000

b) $P_{STA}(H) = \frac{P(H \cap STA)}{P(STA)} \rightarrow P_{STA}(H) = \frac{1600}{2200} = \frac{8}{11} = 72{,}7\%$

zu Aufgabe 2:

a) $P(B) = 0{,}6 \cdot p + 0{,}2 \cdot (1 - p) = 0{,}2 + 0{,}4 \cdot p = 0{,}3 \leftrightarrow p = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25 = 25\%$

b) $P(B) = 0{,}6 \ \ für \ \ p = 1;$

Stochastik / Aufgabengruppe 1 / Teil B

zu Aufgabe 1:

a) Vierfeldertafel:

	A	$\bar{A}$	Σ
S	65	29	94
$\bar{S}$	59	47	106
Σ	124	76	200

$$P(A) \cdot P(S) = \frac{124}{200} \cdot \frac{94}{200} = \frac{4}{25} \cdot \frac{47}{25} = \frac{188}{625} \neq \frac{13}{40} = P(A \cap S)$$

Die erhöhte Geschwindigkeit der Alleinfahrer lässt sich auf die nicht nötige Rücksichtnahme gegenüber eines Beifahrers / einer Beifahrerin zurückführen.

b) $P(75 < v \leq 80) = \frac{80}{200} = 40\%;$

$$B(100; 0{,}80; 76 \leq k \leq 80) = B(100; 0{,}80; k \leq 80) - B(100; 0{,}80; k \leq 75)$$
$$= 0{,}53984 - 0{,}13135 = 40{,}85\%;$$
$$d.h.: \ P(75 < v \leq 80) \approx B(100; 0{,}80; 76 \leq k \leq 80)$$

c) $B(100; 0{,}80; 0 \leq k \leq v^*) > 0{,}95 \rightarrow v^* = 87 \frac{km}{h}$

zu Aufgabe 2:

a) $B(n; 0{,}19; 0 < k \leq n) = 1 - B(n; 0{,}19; 0; k = 0) > 0{,}99 \rightarrow n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}81} = 21{,}85$
Es müssen mindestens 22 Geschwindigkeitsmessungen durchgeführt werden!

b) $E(X) - \sigma = 50 \cdot 0{,}19 - \sqrt{50 \cdot 0{,}19 \cdot 0{,}81} = 6{,}73$

H_0: „p = 0,19“ mit $A_0 = \{7, \ldots, 50\}$	Messung wird korrekter maßen fortgesetzt!
H_0: „p = 0,19“ mit $A_0 = \{0, \ldots, 6\}$	Messung wird korrekter maßen abgebrochen!
H_1: „p = 0,10“ mit $A_1 = \{7, \ldots 50\}$	**Messung wird fälschlicherweise fortgesetzt!**
H_1: „p = 0,10“ mit $A_1 = \{0, \ldots 6\}$	Messung wird korrekter maßen abgebrochen!

Die Messung soll fälschlicherweise fortgesetzt werden …

$$B(50; 0{,}10; 6 < k \leq 50) = 1 - B(50; 0{,}10; k \leq 6) = 1 - 0{,}77023 = 22{,}98\%$$

Stochastik / Aufgabengruppe 2 / Teil A

zu Aufgabe 1:

a) Vierfeldertafel:

	Interesse	**Kein Interesse**	**Σ**
Männlich	0,08	0,62	0,7
Weiblich	0,1	0,2	0,3
Σ	0,18	0,82	1

Zuordnung:
A → 4; B → 2; C → 1; D → 3;

b) Mittelpunktswinkel φ: φ = 360°·0,08 = 28,8°

zu Aufgabe 2:

a) $P(B) = 0{,}6 \cdot p + 0{,}2 \cdot (1-p) = 0{,}2 + 0{,}4 \cdot p = 0{,}3 \leftrightarrow p = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25 = 25\%$

b) $P(B) = 0{,}6 \;\; f\ddot{u}r \;\; p = 1;$

Stochastik / Aufgabengruppe 2 / Teil B

zu Aufgabe 1:

c) 50 Kunststoffteile …

$B(50; 0{,}04; k = 2) = \binom{50}{2} \cdot 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^{48} = 27{,}6\%$

$B(50; 0{,}04; k \geq 3) = 1 - B(50; 0{,}04; k \leq 2) = 32{,}3\%$

d) H_0: „p ≥ 0,04“ mit A_0 = {k+1, …, 200}
H_1: „p < 0,04“ mit A_1 = {0, … k}
H_0 ist richtig, soll aber aufgrund des Testergebnisses mit einer Sicherheit von 0,05 dennoch verworfen werden dürfen!

$B(200; 0{,}04; 0 \leq k_i \leq k) \leq 0{,}05 \xrightarrow{TW} k = 3$

Ab dem vierten defekten Kunststoffteil wird die Nullhypothese zu Unrecht angenommen!

e) Da das neue Granulat teurer ist als das bisher verwendete, ist der Kostenfaktor für die Wahl der Nullhypothese entscheidend. Nur dann scheint die Verwendung des neuen Granulats sinnvoll, wenn tatsächlich weniger defekte Teile als bisher produziert werden!

zu Aufgabe 2:

a) Tabelle …

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°
Zugeh. Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

P(„drei verschiedene Farben“) = $3! \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) Tabelle …

X in €	-5	k - 5	5
P(X)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = -5 \cdot \frac{2}{3} + (k-5) \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = 0 \leftrightarrow k = 20$ (in Euronen)

c) Tabelle …

Farbe	Blau	Rot	Grün
Zugeh. Wahrscheinlichkeit	1 - 3·p	2·p	p
Nach Rechnung (Lsng. 1)	**0,7**	**0,2**	**0,1**
Nach Rechnung (Lsng. 2)	$\frac{9}{30}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{7}{30}$

Es gilt: $P(R) \cdot P(B) = (1 - 3 \cdot p) \cdot 2 \cdot p = 2 \cdot p - 6 \cdot p^2 = 0{,}14$

$$-6 \cdot p^2 + 2 \cdot p - 0{,}14 = 0 \rightarrow p_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 3{,}36}}{-12} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 0{,}1 \\ p_2 = \frac{7}{30} \end{cases}$$

Es kommen für den grünen Sektor die Mittelpunktswinkel **36°** und 84° in Frage! Mit der Nebenbedingung der **Verkleinerung** des **grünen Sektors kommt nur noch der Winkel 36°** in Frage!

Geometrie / Aufgabengruppe 1 / Teil A

zu Aufgabe 1:

a) Kugelgleichung:

$$K: \left[\vec{X} - \vec{m}\right]^2 = r^2 \;\rightarrow K: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\right]^2 = 36$$

$$P \; in \; K: \left[\begin{pmatrix}5\\1\\p\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\right]^2 = \left[\begin{pmatrix}4\\-3\\p\end{pmatrix}\right]^2 = 36 \rightarrow p = \sqrt{11}$$

b) Der Richtungsvektor von g muss senkrecht auf dem Radiusvektor $(\vec{b} - \vec{m})$ stehen!

$\begin{pmatrix}-3\\8\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ wegen: $\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ erfüllt z.B.: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\8\\2\end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ die Bedingung!

zu Aufgabe 2:

a) g_a schneidet die x_1x_2-Ebene, wenn …

$$4 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -4 \rightarrow S(-6; a + 4; 0)$$

b) Schnittpunkt von g_a mit der x_3-Achse:

$$g_a: \vec{X}_{g_a} = \begin{pmatrix}2\\a-4\\4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\varphi \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{x_3-Achse} = \vec{X}_{x_3} \rightarrow \begin{cases} 2 + \lambda \cdot 2 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \\ a - 4 + 2 = 0 \rightarrow a = 2 \\ 3 = \varphi \end{cases}$$

$$\rightarrow S_{x_3}(0; 0; 3)$$

Geometrie / Aufgabengruppe 1 / Teil B

zu Aufgabe 1:

a) Ebenengleichung:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\6\\-0{,}5\end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix}6\\0\\-0{,}5\end{pmatrix} \; mit: \vec{n}_E = \begin{pmatrix}0\\6\\-0{,}5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\0\\-0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-36\end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix}1\\1\\12\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\12\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right] = 0 \leftrightarrow x_1 + x_2 + 12 \cdot x_3 - 36 = 0$$

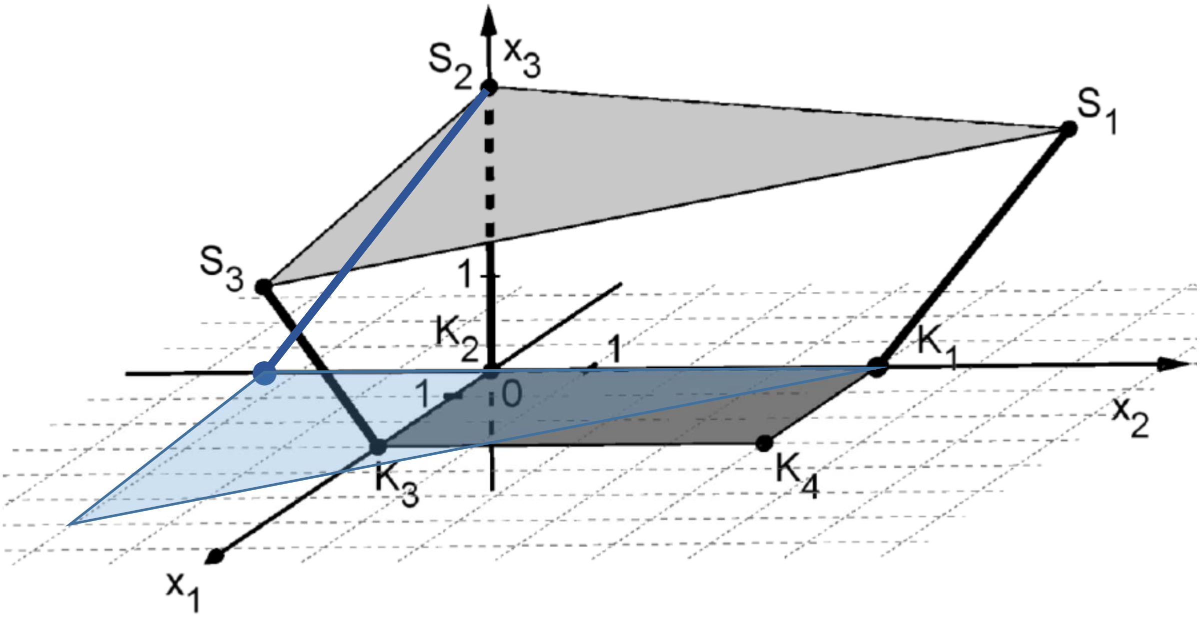
b) Gesucht ist die Sonnensegelfläche:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-3\\-3\\-36\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\sqrt{9 + 9 + 16 \cdot 81}\right| = 18{,}12 m^2$$

Eine zusätzliche Sicherung ist hier nicht nötig!

c) S_1 liegt in der x_2x_3-Ebene
K_1 liegt in der x_2x_3-Ebene → $\overrightarrow{S_1K_1}$ liegt in der x_2x_3-Ebene
Weil auch S_2 in der x_2x_3-Ebene liegt muss auch S_2' in der x_2x_3-Ebene liegen
Da S_2 auf der x_3-Achse liegt muss S_2' auf der x_2-Achse liegen

d)



Es wird mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet (ist wegen der Rechtecksdiagonalen gut zu sehen)!

e) Zu berechnen ist der Neigungswinkel zur x_1x_2-Ebene:

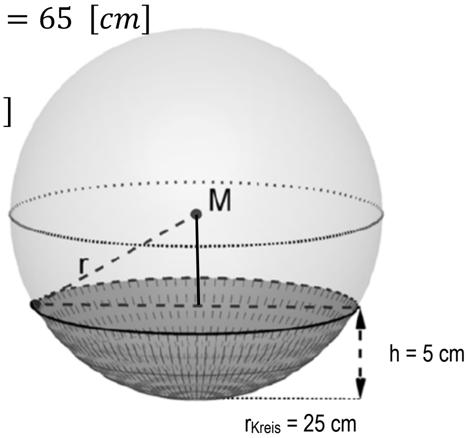
$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_{x_{1,2}}}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{x_{1,2}}|} \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\12\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{146}\cdot 1} = \cos^{-1}\frac{12}{\sqrt{146}} = 6{,}7°$$

Das Abfließen des Regenwassers ist nicht sichergestellt!

f) $Pyth{:}\ 25^2 + \underbrace{(r-5)^2}_{r^2-10\cdot r+25} = r^2 \leftrightarrow 650 - 10\cdot r = 0 \leftrightarrow r = 65\ [cm]$

$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 5^2\cdot(3\cdot 65 - 5) = \frac{4750}{3}\cdot\pi \approx 4974{,}1\ [cm^2]$

$V \approx 4974{,}1\ [cm^2] = 4{,}97\ [l]$



Geometrie / Aufgabengruppe 2 / Teil A

zu Aufgabe 1:

c) Ebenengleichung von E in NF:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -2-1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E\colon\ \vec{n}\circ(\vec{x}-\vec{a}) = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \leftrightarrow -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4 = 0$$

d) Die Ebene E schneidet wegen Teil a) die x_2 – Achse in P(0 / $^4/_3$ / 0).

zu Aufgabe 2:

a) $$h\colon \vec{X} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_g \circ \vec{r}_h = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = -6 + 6 = 0 \quad \rightarrow \vec{r}_g \perp \vec{r}_h$$

$$h\colon \vec{X} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{\mu=2}{\Longrightarrow} F \ \in h \quad sowie\colon \quad g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\lambda=-1}{\Longrightarrow} F \ \in g$$

b) [CF] ist die Höhe von C auf [AB] in besagtem Dreieck!

Geometrie / Aufgabengruppe 2 / Teil B

zur Aufgabe:

a) Seillänge:

$$\vec{m}_{[AB]} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{m}_{[EF]} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{e} + \vec{f}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \left|\vec{m}_{[AB]} - \vec{m}_{[EF]}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{17}{2}} \qquad l_{Seil} = \frac{6}{5} \cdot \sqrt{\frac{17}{2}} \approx 3{,}5\ \ [m]$$

b) Ebenengleichung von L in NF:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-0 \\ 0-6 \\ 0-9 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$L\colon\ \vec{n}\circ(\vec{x}-\vec{a}) = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0 \leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$$

F in L: $2 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 - 12 = 0$ ist wahr, d.h. $F \in L$

c) Es handelt sich tatsächlich um ein Trapez, da sich [AB] in einer Parallelebene zu der Ebene, in der [EF] liegt, befindet und außerdem gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \; und \; \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, also: 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} \rightarrow \overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{EF}$$

d) $\cos\varphi = \frac{\vec{n}_L \circ \vec{n}_{x_1x_2}}{|\vec{n}_L| \cdot |\vec{n}_{x_1x_2}|} \rightarrow \varphi = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{17}} \approx 43°$

e) Es handelt sich offensichtlich um ein Parallelogramm, da die Pfosten parallel zueinander sind und die Seiten der Längen 1,8 m „auf den Pfosten liegen". Damit gilt:

$$A_P = g \cdot h = 1{,}8m \cdot \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 1{,}8m \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{9}{5} \cdot 5 \cdot \sqrt{5} \approx 20 \;\; [m^2]$$

f) Ermittlung von h:

$$f_{[RT]}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix}$$

$$f_{[RT]} \cap g: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta = \frac{1}{3} \;\; und \;\; \mu = \frac{4}{5}: \quad 2 + \frac{4}{5} \cdot (h-2) = 3 \rightarrow h = \frac{13}{4}$$

Der Befestigungspunkt des Netzes hat somit die Koordinaten K(5; 10; 3,25). Da die Plattform im Punkt J(5; 10; 3) fest montiert wurde, ergibt sich die gesuchte Distanz durch den Abstand d_0 von K zu J. Durch direkten Koordinatenvergleich findet man sofort: d_0 = 0,25 m = 25 cm.