Abiturprüfung 2013 / Analysis / Aufgabengruppe I

Teil 1

1. a)

$$g(x)=\sqrt{3\cdot x+9} \qquad ID_g=[-3;+\infty[\qquad N(-3/0)$$

b)

$$g'(x)=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3\cdot x+9}} \rightarrow m_t=g'(0)=\frac{1}{2}$$

$$y=m\cdot x+t \rightarrow 3=t \rightarrow t:\; y=\frac{1}{2}\cdot x+3$$

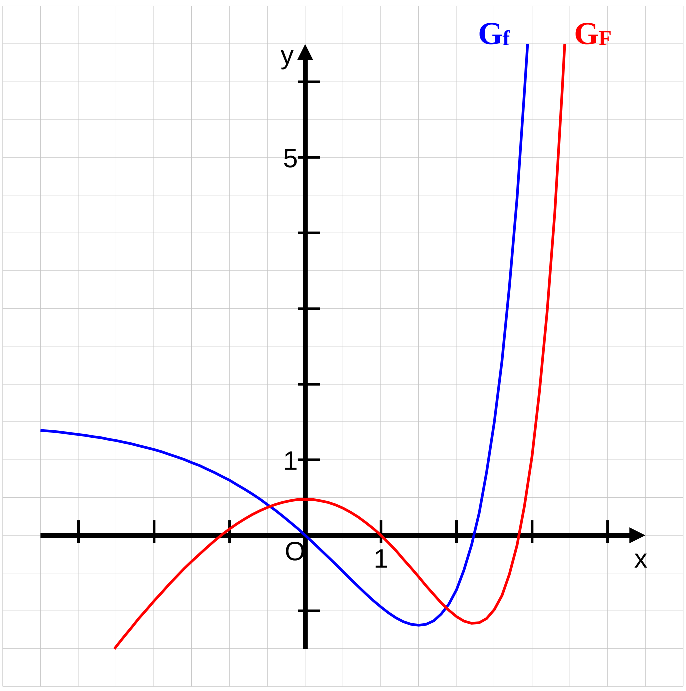
2. a) $f(x)=x^2+2$

b) $f(x)=\dfrac{4\cdot x}{x^2+1} \qquad f'(x)=4\cdot\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \rightarrow \begin{cases} Min(-1/-2) \\ Max(1/2) \end{cases}$

3.

$$\underbrace{(\ln x-1)}_{x_1=e}\cdot\underbrace{\left(e^x-2\right)}_{x_2=\ln 2}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{x}-3\right)}_{x_3=\frac{1}{3}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=e \\ x_2=\ln 2 \\ x_3=\frac{1}{3} \end{cases}$$

4.



Teil II

1. a)

$$f(-x)=2\cdot(-x)\cdot e^{-0,5\cdot(-x)^2}=-2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}=-f(x)\quad \text{(Pktsymmetrie)}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} 2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot x}{e^{0,5\cdot x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x\cdot e^{0,5\cdot x^2}}=0$$

b)

$$f(x)=2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}$$

$$\to f'(x)=2\cdot e^{-0,5\cdot x^2}-2\cdot x^2\cdot e^{-0,5\cdot x^2}=2\cdot\left(1-x^2\right)\cdot e^{-0,5\cdot x^2}$$

$$\to f'(x)=0\Leftrightarrow\left(1-x^2\right)=(1+x)\cdot(1-x)=0$$

$$\to TIP\left(-1/\frac{-2}{\sqrt{e}}\right)\quad HOP\left(+1/\frac{+2}{\sqrt{e}}\right)$$

Die Art der Extremwerte folgt aus der Symmetrie, der Stetigkeit und dem Vorzeichen des Grenzwertes für x gegen + ∞ von f(x) (rechnerischer Nachweis in Teilaufgabe a)).

c)

$$m_S=\frac{f(0,5)-f(-0,5)}{0,5-(-0,5)}=\frac{1}{\sqrt[8]{e}}-\frac{-1}{\sqrt[8]{e}}=\frac{2}{\sqrt[8]{e}}\approx 1,765\qquad m_{T_{x=0}}=2$$

$$d=\frac{2-1,765}{2}=11,75\%$$

d)

$$f(x)=2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}$$

$$A(u)=\int_0^u f(x)dx=\int_0^u 2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}dx=-2\cdot\int_0^u\left(-x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}\right)dx=$$

$$=-2\cdot\left[e^{-0,5\cdot x^2}\right]_0^u=-2\cdot\left[e^{-0,5\cdot u^2}-1\right]=2-2\cdot e^{-0,5\cdot u^2}$$

$$\lim_{u\to\infty} A(u)=\lim_{u\to\infty}\left[2-2\cdot e^{-0,5\cdot u^2}\right]=2$$

Der Graph G_f schließt mit der gesamten positiven x-Achse ein endliches Flächenstück mit dem Flächeninhalt 2 FE ein (uneigentliches Integral)!

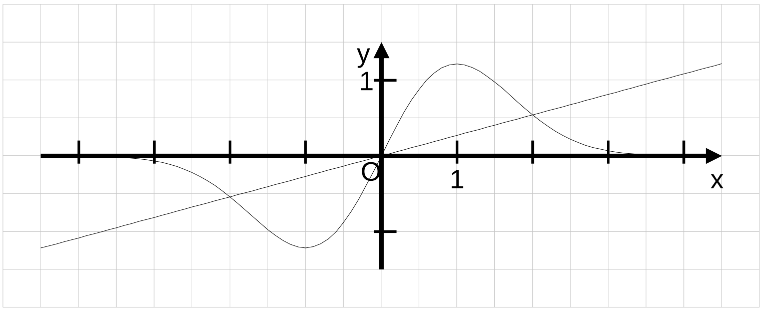
e)

$$f(x)=2\cdot x\cdot e^{-0,5\cdot x^2}=\frac{2}{e^2}\cdot x=k(x)\Leftrightarrow 2\cdot\left(e^{-0,5\cdot x^2}-e^{-2}\right)\cdot x=0$$

$$S_1(0/0);\quad e^{-0,5\cdot x^2}-e^{-2}=0\Leftrightarrow -0,5\cdot x^2=-2\Leftrightarrow x^2=4\to\begin{cases} S_2\left(2/\overbrace{\frac{4}{e^2}}^{k(2)}\right)\\ S_3\left(-2/\frac{-4}{e^2}\right)\end{cases}$$

$$B=A(2)-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot k(2)=2-\frac{2}{e^2}-\frac{4}{e^2}=2-\frac{6}{e^2}\approx 1,19\quad FE$$

zu e)



2. a)

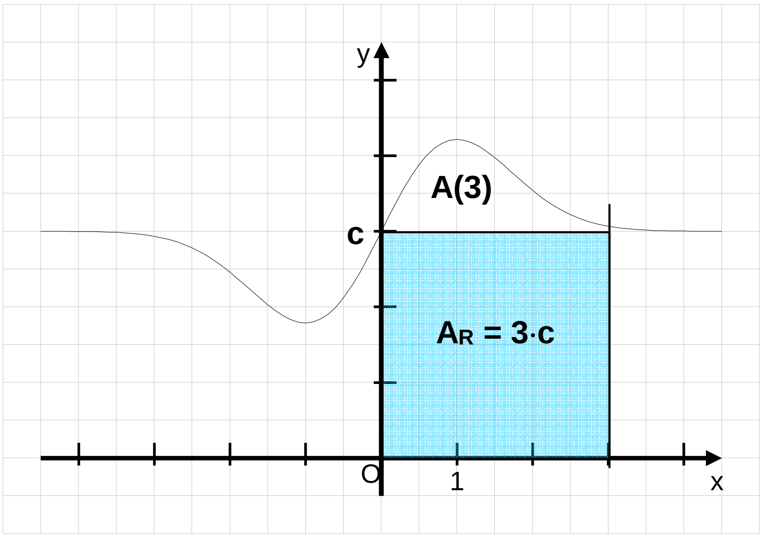
$$g_c(x) = f(x) + c = 2 \cdot x \cdot e^{-0,5 \cdot x^2} + c$$

$$HOP_g\left(1/\frac{2}{\sqrt{e}} + c\right); \quad \lim_{x\to\infty} g_c(x) == c$$

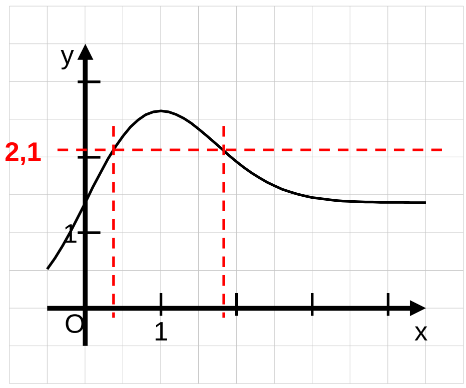
b)

$\alpha)\quad c = +5; \qquad \beta)\quad c = 0; \qquad \gamma)\quad c = 0{,}5;$

c)



3. a)



Von etwa 1959 – 1973 lag die Geburtenziffer bei mindestens 2,1!

b)

Leider werden die Einheimischen auf lange Sicht ausster-ben!

c)

Die stärkste Abnahme liegt vor, wenn die Tangente am Funktionsgraphen den kleinstmöglichen Wert annimmt (etwa im Jahr 1975). Der Graph der ersten Ableitung besitzt an dieser Stelle ein Minimum. Um die Vermutung zu bestätigen sollte die zweite Ableitung also ab 1975 positiv sein!

Teil 1

5.

$$f(x) = \ln(2013 - x); \quad ID_f =]-\infty; 2013[$$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln(2013 - x) = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \to 2013 \\ x < 2013}} \ln(2013 - x) = -\infty;$$

$$S_x(2012/0); \quad S_y(0/\ln 2013);$$

6.

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

$$f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$$

$$f''(x) = 2 \cdot \cos x - \sin x \rightarrow f''(0) = 2 \cdot \cos 0 - \sin 0 = 2 > 0$$

Der Graph von f ist linksgekrümmt!

7. b)

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

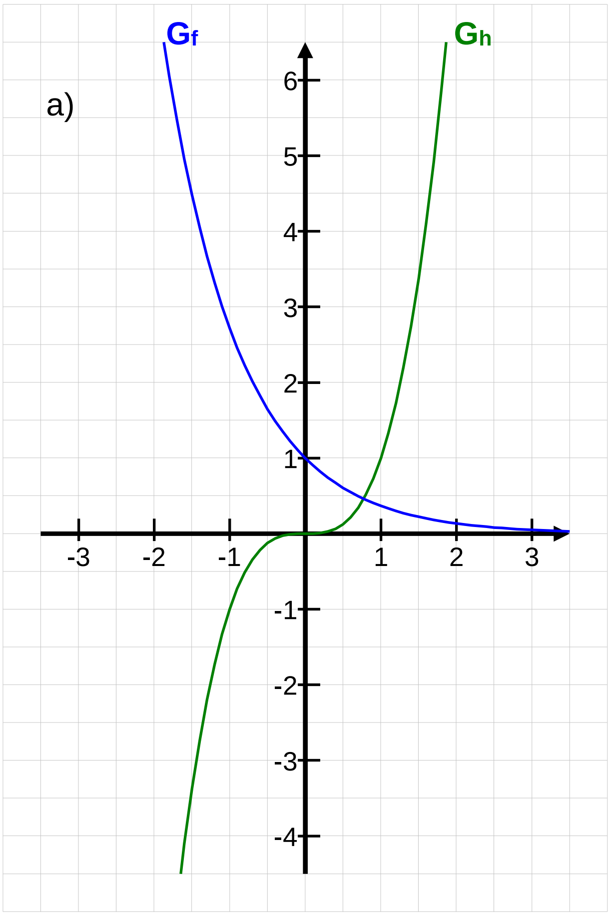
$$d(x) = e^{-x} - x^3$$

$$d'(x) = -e^{-x} - 3 \cdot x^2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1 + \frac{e^{-1} - 1^3}{e^{-1} + 3 \cdot 1^2}$$

$$x_2 = 0{,}8123090301 \approx 0{,}81$$

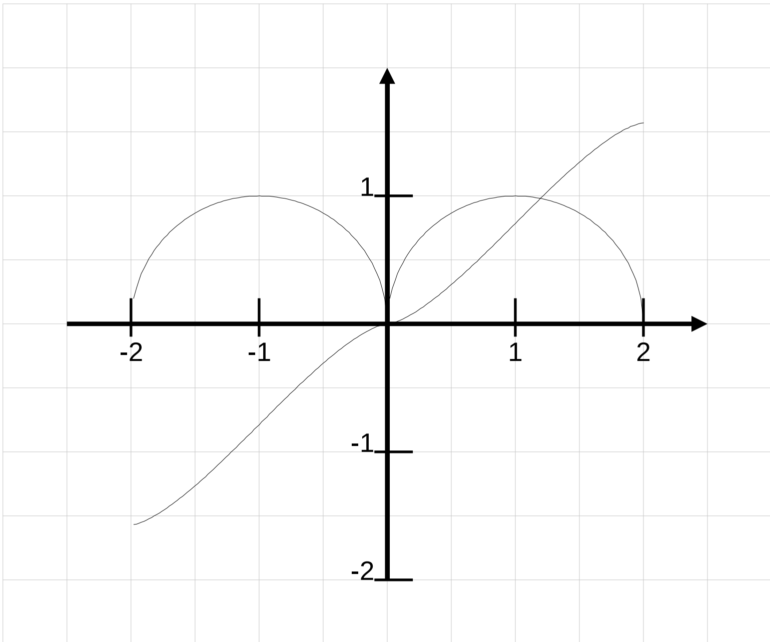


8. a)

$$F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0;\quad F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{1^2\cdot\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$F(-2)=\int_0^{-2} f(t)dt=-\int_{-2}^{0} f(t)dt=-\frac{1^2\cdot\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

b)



Teil II

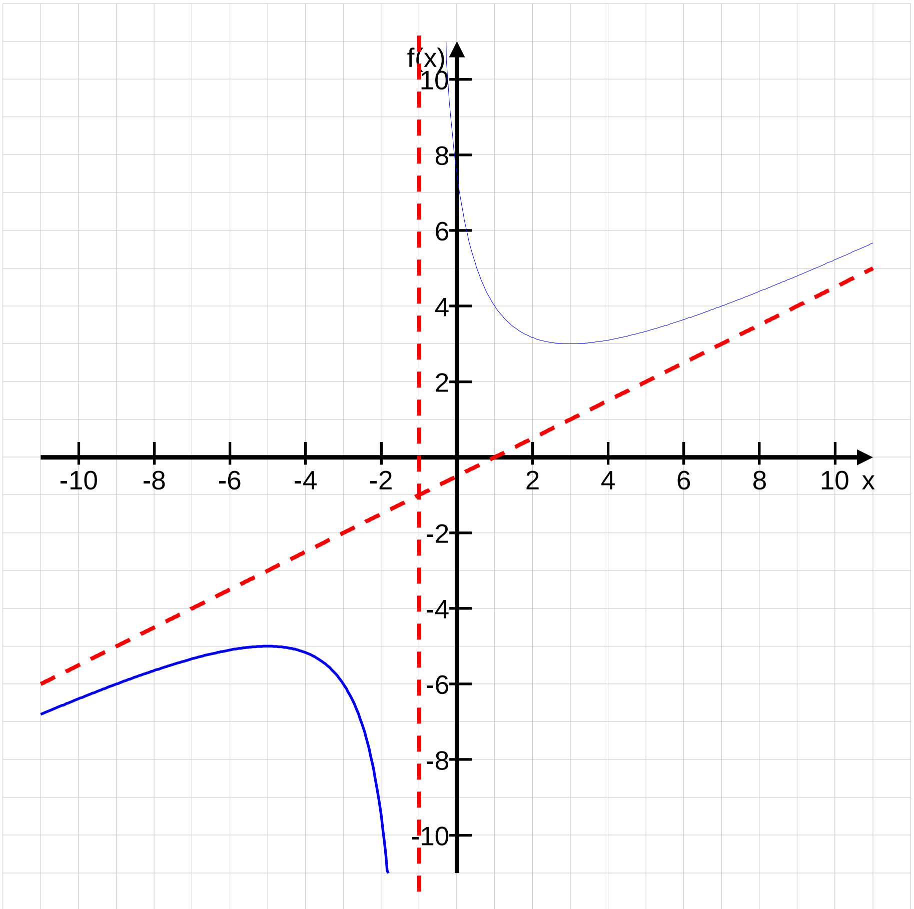
4. a)

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}+\frac{8}{x+1}$$

$Vertikale\ \ A:\ \ x=-1;$

$$Schräge\ \ A:\ \ s(x)=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}$$

$$f(x)-s(x)=0 \Leftrightarrow \frac{8}{x+1}=0\quad geht\ \ neda\ \ \ldots \rightarrow G_f \cap G_s=\{\ \}$$



b)

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}+\frac{8}{x+1}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{-8}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=16$$

$$\Rightarrow x_1=3;\quad x_2=-5;\quad E_1(3/3);\quad E_2(-5/-5)$$

$$f''(x)=\frac{16}{(x+1)^3}\rightarrow \begin{cases} f''(3)>0 \rightarrow E_1(3/3)\ ist\ \ Minimum \\ f''(-5)<0 \rightarrow E_2(-5/-5)\ ist\ \ Maximum \end{cases}$$

5. a)

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}+\frac{8}{x+1}\qquad g(x)=f(x-1)+1$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-1)-\frac{1}{2}+\frac{8}{(x-1)+1}+1=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{8}{x}$$

$$g(-x) = -\frac{1}{2}\cdot x - \frac{8}{x} = -\left(\frac{1}{2}\cdot x + \frac{8}{x}\right) = -g(x) \quad \rightarrow Pktsymmetrie$$

b)

$$\int_0^4 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x + 8\cdot \ln(x+1)\right]_0^4 = 6 + 8\cdot \ln(5) - 0 = 6 + 8\cdot \ln(5);$$

$$\int_{-6}^{-2} f(x)dx = \underbrace{-\left[\underbrace{\int_0^4 f(x)dx}_{Symmetrie} + \underbrace{8}_{A_{Rechteck}}\right]}_{\substack{unterhalb\ der\\ x-Achse}} = 8\cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right) - 14;$$

6. a)

$$f(0) = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2} + \frac{8}{0+1} = 7{,}5$$

$$f(15) = \frac{1}{2}\cdot 15 - \frac{1}{2} + \frac{8}{16} = 7{,}5$$

Ist ja klar; wenn die Dose ganz leer ist, ist der Schwerpunkt im „Symmetriezentrum“, wenn die Dose ganz voll ist ebenfalls!

b)

Bei Füllbeginn sinkt der Schwerpunkt rapide Richtung Minimum; ist dieses erreicht beginnt er – allerdings deutlich langsamer – wieder nach oben zu wandern! Am Minimum liegt der Schwerpunkt genau in der Oberflächenhöhe der Flüssigkeit!

c)

Ablesen aus dem Koordinatensystem ergibt …
Auf dem Intervall I = [0,5; 9,5] liegt der Schwerpunkt höchstens 5 cm hoch!

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = 5$$

$$\frac{(x^2-1)+16}{2\cdot(x+1)} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 15 = 10\cdot x + 10 \Leftrightarrow x^2 - 10\cdot x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-20}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 9{,}47 \\ x_2 = 0{,}53 \end{cases}$$

Da bei x = 3 ein Minimum vorliegt gehört der Bereich zwischen den berechneten Werten zur Lösungsmenge der relevanten Ungleichung!

Tabelle:

	0	A	B	AB
Rh+	35 %	37 %	9 %	4 %
Rh-	6 %	6 %	2 %	1 %

1. a)

$$\binom{25}{10} \cdot 0{,}43^{10} \cdot 0{,}57^{15} = 15{,}39\%$$

b)

$$B(25/0{,}35/k \geq 13) = 1 - B(25/0{,}35/k \leq 12) = 1 - 0{,}93956 = 0{,}06044 \approx 6{,}0\%$$

c)

p für geeignetes Spenderblut: p = 8% = 0,08 (Summe der Einzelw.)

$$B(n/0{,}08/k \geq 1) = B(n/0{,}08/k = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^n > 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow 0{,}92^n < 0{,}05 \Leftrightarrow n \cdot \ln 0{,}92 < \ln 0{,}05 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}92} = 35{,}93 \Rightarrow n = 36$$

2. a)

	S	$\overline{S}$	
T	0,0007363	0,007794228	0,00850528
$\overline{T}$	0,0000037	0,991465772	0,991469472
	0,00074	0,99926	1

	S	$\overline{S}$	
T	0,07%	0,78	0,85%
$\overline{T}$	0,00%	99,15%	99,15%
	0,07%	99,93%	1

$\overline{S \cup T}$ beschreibt das Ereignis, dass die Testergebnisse bei den Neugeborenen ohne Stoffwechselstörung korrekterweise ein negatives Ergebnis liefern.

b)

$P(T) = 0{,}85\%$ *siehe Tabelle*

$$P_T(S) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} \rightarrow P_T(S) = \frac{0{,}0007363}{0{,}00850528} = 0{,}08656968307 = 8{,}66\%$$

Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass eine Stoffwechselstörung vorliegt, wenn bereits bekannt ist, dass das Testergebnis positiv ausgefallen ist.

c) $E(S \cap \overline{T}) = 1000000 \cdot P(S \cap \overline{T}) = 3{,}7 \mathrel{\widehat{=}} 4$ Bei 4 Neugeborenen!

3. a)

$$P(G) = 3 \cdot \frac{\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{3}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{28}$$

b)

Mitdenken – Freude schenken …

Unter der Annahme, dass von 28 Personen nur eine gewinnt werden 28€·2 = 56 € eingenommen. Pro Spieler soll 1,25€, also 1,25€·28 = 35€ verbucht werden können, d.h. es können bei einem Gewinn 56€ - 35€ = 21€ ausbezahlt werden!

Variante 2:

	Verliert	Gewinnt
X	-2 €	(G – 2) €
P(X)	$\frac{27}{28}$	$\frac{1}{28}$

Der zu erwartende Verlust eines Spielers entspricht dem durchschnittlichen Gewinn der Kinderstation!

$$E(X) = \frac{27}{28} \cdot (-2) + \frac{1}{28} \cdot (G-2) = -1{,}25 \qquad (Spielersicht)$$

$$\Rightarrow G = \left(-\frac{5}{4} + \frac{27}{14}\right) \cdot 28 + 2 = \frac{19}{28} \cdot 28 + 2 = 21$$

Es müssen 21 € ausbezahlt werden um mit einer durchschnittlichen Einnahme von 1,25 € pro Spielrunde für die Spielecke zu rechnen!

4. a)

	J	$\overline{J}$	
E	0,04	0,40	0,44
$\overline{E}$	0,08	0,48	0,56
	0,12	0,88	1

b)

$$P_J\left(\overline{K}\right)=\frac{P\left(J\cap\overline{K}\right)}{P(J)}\rightarrow P_J\left(\overline{K}\right)=\frac{0{,}08}{0{,}12}=\frac{2}{3}\approx 66{,}7\%$$

$$P_{\overline{J}}\left(\overline{K}\right)=\frac{P\left(\overline{J}\cap\overline{K}\right)}{P\left(\overline{J}\right)}\rightarrow P_{\overline{J}}\left(\overline{K}\right)=\frac{0{,}48}{0{,}88}=0{,}\overline{54}\approx 54{,}55\%$$

$$\rightarrow P_J\left(\overline{K}\right)>P_{\overline{J}}\left(\overline{K}\right)$$

… da der Anteil der Jungwähler an der Zahl der Wahlberechtigten relativ gering ist!

c)

$$B(48/0{,}12/6)=\binom{48}{6}\cdot 0{,}12^6\cdot 0{,}88^{42}=17{,}07\%$$

5. a)

H$_0$: „p ≤ 0,5“ A$_0$ = {0, 1, 2, …, k}
H$_1$: „P > 0,5“ A$_1$ = {k+1, ..., 200}

Die Nullhypothese soll abgelehnt werden obwohl sie zutreffend ist …

$$B(200/0{,}5/k+1\le i\le 200)\le 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow 1-B(200/0{,}5/0\le i\le k)\le 0{,}05\Leftrightarrow B(200/0{,}5/0\le i\le k)\ge 0{,}95$$

$$\xrightarrow{TW} k=112$$

Die Nullhypothese kann auf dem vorgegebenen Signifikanzniveau erst ab dem 113 Befragten mit positivem Ergebnis für A abgelehnt werden.

b)

Das Risiko, einen Fehler zu begehen wenn auf die Kampagne verzichtet wird, liegt bei 5 %. Das ist hinreichend gering!

6. a)

$$P(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}}=\frac{8\cdot 6}{220}=\frac{12}{55};\quad P(X=2)=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}}=\frac{28\cdot 4}{220}=\frac{28}{55};$$

b)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$
X·P(X)	0	$\frac{12}{55}$	$\frac{56}{55}$	$\frac{42}{55}$
X^2·P(X)	0	$\frac{12}{55}$	$\frac{112}{55}$	$\frac{126}{55}$

$$E(X)=2;\quad VAR(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2 \rightarrow VAR(X)=\frac{50}{11}-4=\frac{6}{11}$$

c)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$
X·P(X)	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$
X^2·P(X)	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{8}{3}=\frac{24}{9}$

$$E(X)=2;\quad VAR(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2 \rightarrow VAR(X)=\frac{42}{9}-4=\frac{2}{3}$$

Aufgrund der Abweichungen des 3-ten Wertes (Quadratischer Eingang von X) kann vermutet werden, dass VAR(Y) > VAR(X).

Das Geschwätz der ausgelieferten Musterlösung ist nicht hinreichend stichhaltig … (deutliche Abweichungen???)

Aufgabe 1:

a) Der Punkt C besitzt dieselben x_1 und x_3 Koordinaten wie der Punkt D. Da seine x_2 – Koordinate mit der des Punktes B übereinstimmen muss ergibt sich damit C(20/10/6).

ABCD ist ein Quadrat, weil…

$$\overline{AB} = 10LE = \overline{CD}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(28-20)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{100} = 10 = \overline{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

b) E in Normalenform:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60-0 \\ 0+0 \\ 0-80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ -80 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\to E: \quad \vec{n} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_3 - 84 = 0$$

c) Neigungswinkel φ:

$$\tan\varphi = \frac{6}{8} \to \varphi = 36{,}9°$$

d) Die Ebene F durch PQRS ist parallel zur Ebene E mit dem Aufpunkt P(0/0/0). Damit ergibt sich folgende mögliche NF von F: $3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_3 = 0$.

e) Das Volumen lässt sich deshalb mit der Formel V = G·h berechnen, weil die sich gegenüberstehenden Seitenflächen parallel zueinander liegen und die Grundfläche ABQP (enthalten in der x_1x_2 – Ebene) auf der Seitenfläche APSD (enthalten in der x_1x_3 – Ebene) senkrecht steht! Damit liegt lediglich die Schärung eines Quaders vor!

f) $M = V \cdot \sigma = l \cdot b \cdot h \cdot \sigma \to M = 2{,}8 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}6m^3 \cdot 2{,}1\frac{t}{m^3} = 3528kg$

g) Aufgrund der Symmetrie der Grundfläche folgt für den Diagonalenschnittpunkt: $S_d(14/5/0)$. Damit ergibt sich für die Gerade h:

$$h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad h_{norm} : \vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$S_{Endp}\left(\left(11 + \frac{14}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot 3\right) / \left(3 + \frac{14}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot 2\right) / \left(6 - \frac{14}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot 6\right)\right)$$

$$S_{Endp}(12{,}5 / 4 / 3)$$

Wobei sich der gesuchte Endpunkt mit Hilfe des normierten Richtungsvektors von h (multipliziert mit dem Faktor 3,5) ermitteln lässt!

h) Ist der ***Berührpunkt*** K der Kugel bekannt, so lässt sich auch die Kugelgleichung ermitteln (da der Mittelpunkt der Kugel bei gegebenem Radius ebenfalls bestimmt werden kann). Durch Einsetzen von h in die Kugelgleichung erhält man (je nach Lage von K) entweder keine Lösung (Stange läuft an der Kugel vorbei), zwei Lösungen (Stange würde die Kugel durchdringen) oder ***nur eine Lösung (Stange berührt die Kugel)***.

Nachlese zum Stangen – Kugelproblem

Geg.: Strecke g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad mit \ \ \lambda \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Kugelmittelpunkt M mit $x_3 = 14 \ \ (6+8))$

Ges.: Für welche M berührt die Kugel die Stange?

Lösung:

Bedingungen:

$$i) \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad ii) \quad \begin{pmatrix} m_1 - (11 + 3 \cdot \lambda) \\ m_2 - (3 + 2 \cdot \lambda) \\ 14 - (6 - 6 \cdot \lambda) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow Tangentialbedingung$$

$$iii) \quad \begin{pmatrix} m_1 - (11 + 3 \cdot \lambda) \\ m_2 - (3 + 2 \cdot \lambda) \\ 14 - (6 - 6 \cdot \lambda) \end{pmatrix}^2 = 8^2 = 64$$

$$\xrightarrow{ii)} 3 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 - 49 \cdot \lambda - 87 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 - 87}{49}$$

Nach langer Rumrechnerei erhält man die Ortskurve des Kugelmittelpunkts bei Projektion in die Hilfsebene H: $x_3 - 14 = 0$ für eine unendlich lange Stange!

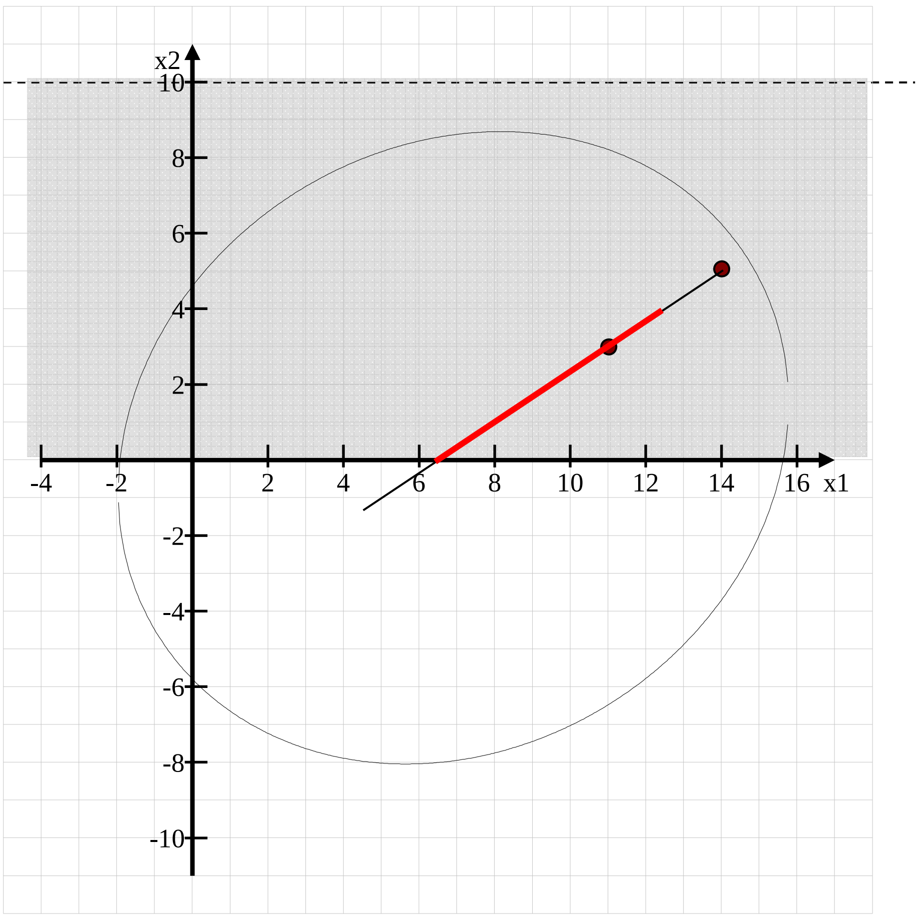
$$x_2 = \frac{2}{15} \cdot x_1 - \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{6076 + 2708 \cdot x_1 - 196 \cdot x_1^2}}{15}$$

Klar ist dass die Tangentialbedingung nur für bestimmte x_1 – Werte erfüllt werden kann …

$$x_{1/1} = 15{,}78074574 \qquad \rightarrow B_1(15{,}78074574 / 1{,}504099432)$$
$$x_{1/2} = -1{,}964419205 \qquad \rightarrow B_2(-1{,}964419205 / -0{,}8619225607)$$

Es ist leicht nachzurechnen, das die Stange gerade so lang ist, dass sie die x_1x_3 – Ebene in S(6,5/0/15) berührt!

Skizze:



Beachtet man die Einschränkung, dass $x_2 \geq 0$ gelten muss erhält man für den am weitest entfernten Mittelpunktskandidaten die Koordinaten K(-1,92../0/14). Dessen Abstand zum Stangenende beträgt tatsächlich mehr als 8 LE (8,4…)!

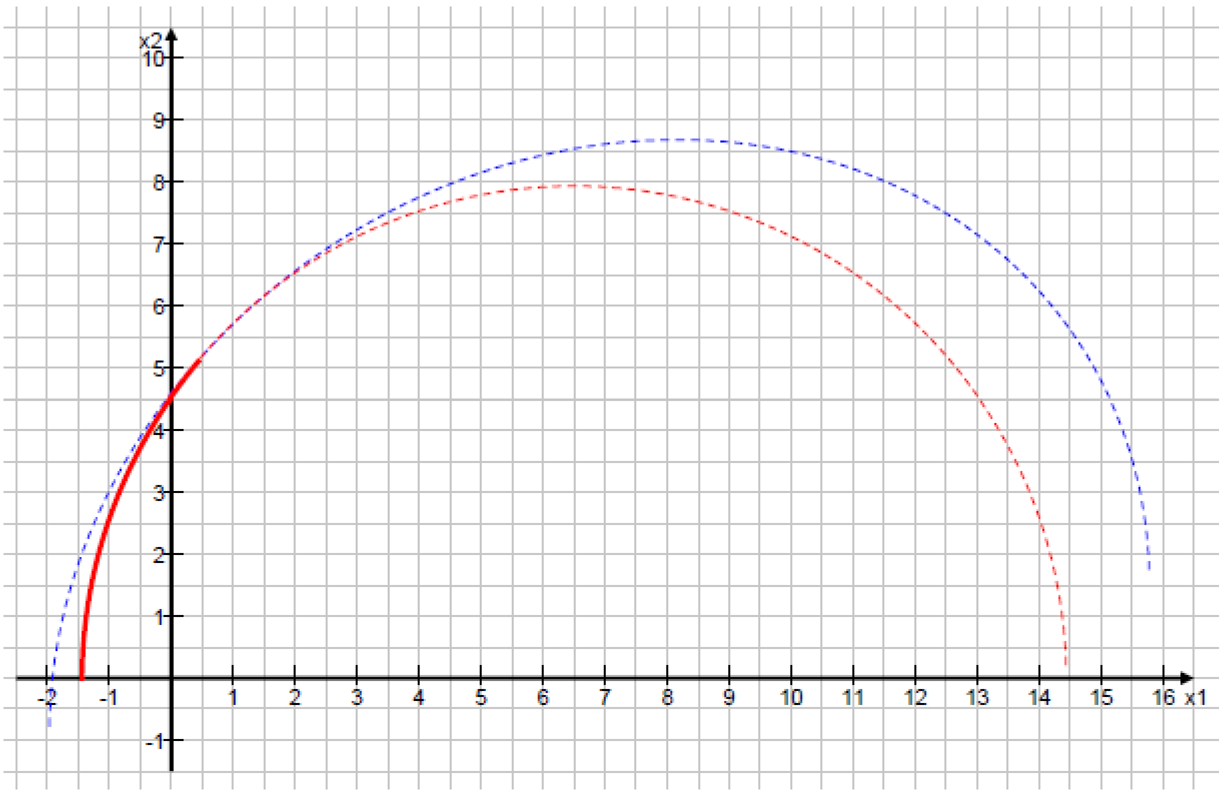
Der „letzte“ Kugelmittelpunkt, der die Tangentialbedingung für die Stange erfüllt besitzt die Koordinaten …

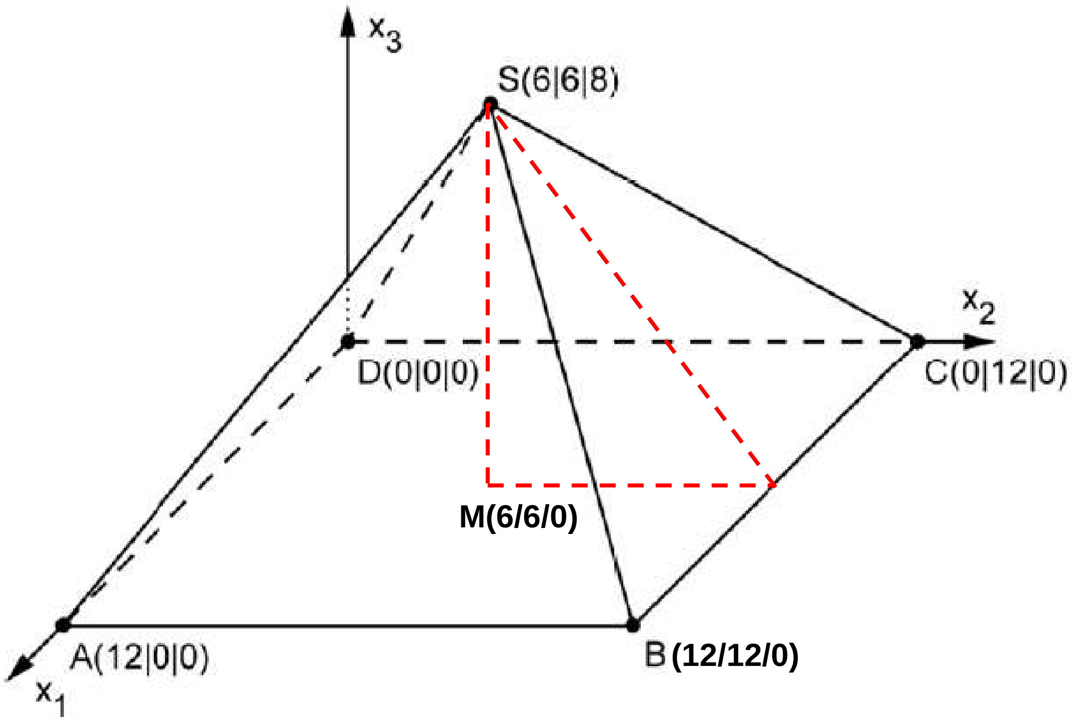
$$L\left(\left(\frac{133}{26}-\frac{6}{13}\cdot\sqrt{87}\right);\left(-\frac{12}{13}+\frac{9}{13}\cdot\sqrt{87}\right);14\right)$$

Für kleinere x_1 – Werte bewegt sich der Kugelmittelpunkt auf einer Kreislinie mit dem Radius $r=\sqrt{63}$ um den Mittelpunkt M*(6,5/0/14) [Projektion des Stangenendes in die Kugelmittelpunktsebene!]

Gleichung: $(x_1-6{,}5)^2+x_2^2=63 \rightarrow x_2=\sqrt{-x_1^2+13\cdot x_1+\frac{83}{4}}$

Grafische Verdeutlichung …





Aufgabe 1:

i) Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot \overline{MS} \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 384\ [VE]$

j) E in Normalenform:

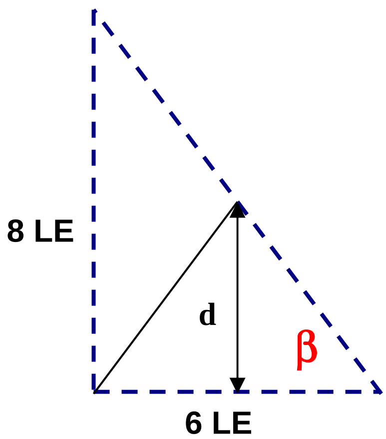
$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0+96 \\ 72-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow E: \quad \vec{n} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 48 = 0$$

k) Berechnung von d:

$$\left. \begin{aligned} \tan\beta &= \frac{8}{6} \rightarrow \beta = 53{,}1° \\ k &= \frac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{8}{k} = \frac{k}{d}$$

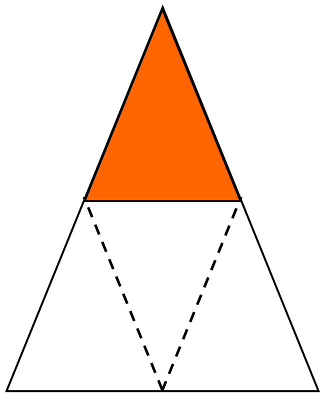
$$\Leftrightarrow d = \frac{4{,}8^2}{8} = 1{,}2 \cdot 2{,}4 = 2{,}88$$



l) Fläche:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CS}\right|=\frac{1}{2}\cdot|\vec{n}|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\96\\72\end{pmatrix}\right|=60$$

$$\Rightarrow A_g=\frac{1}{4}\cdot A=15\ \ [FE]$$



m) Wirkungsgrad:

β bereits berechnet zu 53,1°
d.h.: Wirkungsgrad liegt bei etwa 97° (Tabelle)

Aufgabe 2:

a) Berechnung des Schnittpunkts T

$$g:\vec{X}=\begin{pmatrix}8\\1\\7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-9\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}=\vec{X}:h$$

$$1+\lambda=5-2\cdot\mu\Leftrightarrow\lambda=4-2\cdot\mu$$

$$8+3\cdot\lambda=-1+\mu\Rightarrow 8+3\cdot(4-2\cdot\mu)=-1+\mu\Leftrightarrow 20-6\cdot\mu=-1+\mu\Leftrightarrow\mu=3$$

$$\Rightarrow\lambda=-2$$

$$\xrightarrow{\text{Probe}}7+2\cdot\lambda=-9+4\cdot\mu\rightarrow 3=\overbrace{7-4}^{\lambda=-2}=\overbrace{-9+12}^{\mu=3}=3\quad(w)$$

$$\rightarrow T(2/-1/3)$$

b) Beachte:

$$g:\vec{X}=\begin{pmatrix}8\\1\\7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\quad aber\ \ auch:\quad g:\vec{X}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow P(5/0/5)\ \ für\ \ \lambda=1\qquad Q(-1/-2/1)\ \ für\ \ \lambda=-1$$

c) Durch Ausnützen der Bedingung, dass sich die Diagonalen eines Rechtecks gegenseitig halbieren und gleich lang sind ergibt sich die verlangte Lösung!

$$\left|\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{14}\xrightarrow{REB}\quad\mu\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{14}\Leftrightarrow\mu=\sqrt{\frac{14}{21}}\rightarrow\overrightarrow{(u,v)}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-9\end{pmatrix}\pm\sqrt{\frac{14}{21}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$$