Prüfungsteil A

Analysis

Aufgabengruppe 1

1 a) Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2+2x}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Geben Sie D_f und die Nullstellen von f an.

Definitionsmenge: IR\{Nullstelle des Nenners}

$$x + 1 = 0 \leftrightarrow x = -1 \rightarrow ID_f = IR\backslash\{-1\}$$

Nullstellen: Zähler Null setzen …

$$\underbrace{x^2 + 2x}_{x\ ausklammern} = 0 \leftrightarrow x \cdot (x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

b) Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, die die folgenden Eigenschaften hat: Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert; ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ als waagrechte Asymptote und schneidet die y-Achse im Punkt $(0|4)$.

Wenn h(x) (gebrochen rational …) auf ganz IR definiert sein soll, darf der Nenner keine Nullstellen besitzen. Die einfachste Variante einer nullstellenfreien Fkt. ist eine nach oben verschobene Normalparabel. Ist eine waagrechte Asymptote vorhanden, so muss der Zählergrad gleich dem Nennergrad sein (also auch eine quadratische Fkt.).

Wenn man keine direkte Lösung findet, könnte der folgende Ansatz weiterhelfen …

$$h(x) = \frac{a \cdot x^2 + b}{c \cdot x^2 + d}$$

Wählt man für den Nenner die „einfachste“ Parabel, vereinfacht sich h(x) zu …

$$h(x) = \frac{a \cdot x^2 + b}{x^2 + 1}$$

Dann gilt:

$$h(0) = \frac{+b}{+1} = 4 \rightarrow b = 4$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a \cdot x^2 + 4}{x^2 + 1} = a = 3 \rightarrow a = 3$$

und damit …

$$h(x) = \frac{3 \cdot x^2 + 4}{x^2 + 1}$$

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{4}{x}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

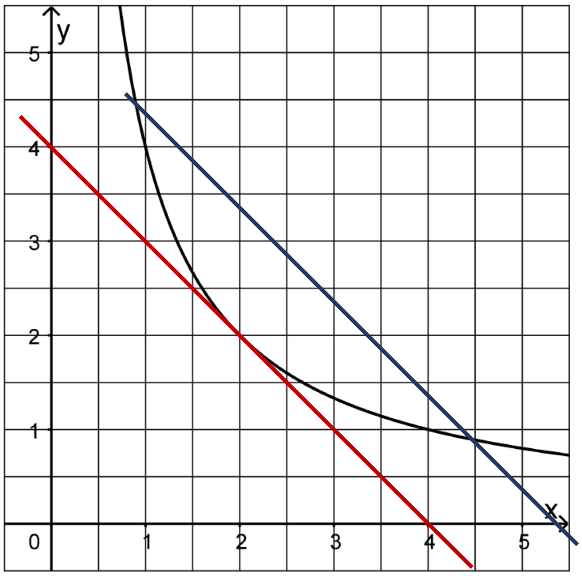


Abb. 1

zu a)

$$\int_1^e g(x)dx = \int_1^e \left(\frac{4}{x}\right)dx =$$

$$= [4 \cdot lnx]_1^e = 4 \cdot \underbrace{lne}_{=1} - 4 \cdot \underbrace{ln1}_{=0} = 4$$

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_1^e g(x)dx$.

b) Ermitteln Sie grafisch diejenige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: Die lokale Änderungsrate von g an der Stelle x_0 stimmt mit der mittleren Änderungsrate von g im Intervall $[1;4]$ überein.

Die mittlere Änderungsrate entspricht der Sekantensteigung der Punkte auf dem Funktionsgraphen, die die Randwerte des gegebenen Intervalls als x-Koordinaten besitzen!

Die lokale Änderungsrate entspricht einer Tangentensteigung!

Gesucht ist also der x_0 - Wert, für den die Tangentensteigung mit der gegebenen Sekantensteigung übereinstimmt! Hier gilt: $x_0 = 2$.

3 Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente (vgl. Abbildung 2).

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f(f(x))$.

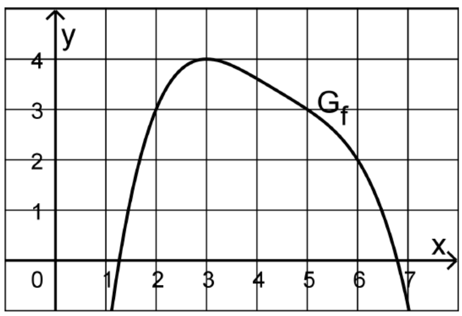


Abb. 2

a) Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an.

f(6) lässt sich sofort aus dem Graphen ablesen … f(6) = 2. Damit ergibt sich durch einsetzen von 6 in g(x) der Term …

$$g(6) = f\left(\underbrace{f(6)}_{=2}\right) = \underbrace{f(2)}_{\to Graph} = 3$$

b) Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. Ermitteln Sie damit und mithilfe von Abbildung 2 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt.

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \rightarrow x = 3 \ \ (auch\ nach\ Angabe) \\ f'\left(\underbrace{f(x)}_{=3}\right) = 0 \rightarrow g'(2) = g'(5) = 0 = g'(3) \end{cases}$$

Damit besitzt g(x) drei (echte) Extremstellen!

4 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

$$f'_a(x) = -a \cdot e^{-x} \rightarrow f'_a(0) = -a \cdot \underbrace{e^{-0}}_{=1} = -a$$

b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0 \mid f_a(0))$. Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

$$f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3 \rightarrow P(0; a+3); \ \ m_t = -a;$$

$$y = m_t \cdot x + t \rightarrow y = -a \cdot x + (a+3)$$

Da die Steigung positiv sein soll gilt zum Einen: a < 0. Die zweite Bedingung ergibt sich aus der Lage der Nullstelle der Tangenten …

$$0 = -a \cdot \underbrace{x}_{>\frac{1}{2}} + (a+3) \rightarrow x = \frac{a+3}{a} > \frac{1}{2} \leftrightarrow a \cdot \frac{1}{2} + 3 > 0 \rightarrow a > -6$$

Für: -6 < a < 0 sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Analysis

Aufgabengruppe 2

1 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{2x^2}{x^2-9}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

a) Geben Sie D_g sowie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g an.

Definitionsmenge: IR\{Nullstelle des Nenners}

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow ID_f = IR\backslash\{\pm 3\}$$

waagrechte Asymptote:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 2 \rightarrow y = 2$$

y = 2 ist die gesuchte waagrechte Asymptote!

b) Zeigen Sie, dass der Graph von g in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente besitzt.

$$g´(x) = \frac{4x \cdot (x^2-9) - 4 \cdot x^3}{(x^2-9)^2} = \frac{-36x}{(x^2-9)^2} = 0 \leftrightarrow x = 0$$

x = 0 ist die einzige Nullstelle von g´(x), damit hat G_g nur in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente (kann man auch anders begründen / nachweisen).

2 Betrachtet werden die in IR definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_F von F.

zu a)

$$\int_1^7 f(x)dx = [F(x)]_1^7$$

$$= F(7) - F(1) = 5 - 1 = 4$$

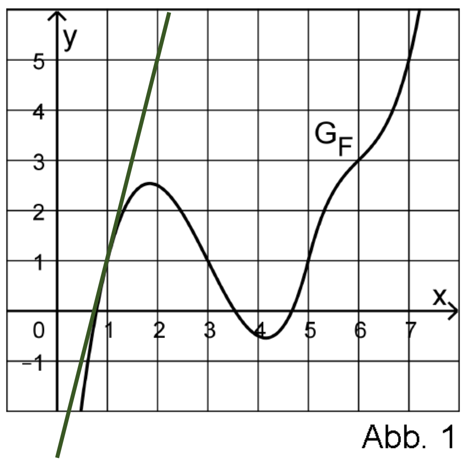


Abb. 1

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)dx$.

b) Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 1.

$f(1) = F'(1) = 4$ entspricht der Tangentensteigung am Punkt mit der x – Koordinate Eins. Einzeichnen der Tangenten und Ablesen der Tangentensteigung ergibt den gesuchten Funktionswert.

3 a) Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \ln(2x-3)$ mit Definitionsmenge $D_h = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Geben Sie die Nullstelle von h sowie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von h an.

Nullstelle der ln-Fkt.: Argument muss 1 sein!

$$h(x) = \ln(2x-3) = 0 \leftrightarrow (2x-3) = 1 \rightarrow x = 2$$

$$h(x) = \ln(2x-3) \rightarrow h'(x) = \frac{2}{2x-3}$$

b) Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f besitzt die Nullstelle $x = 2$, außerdem gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

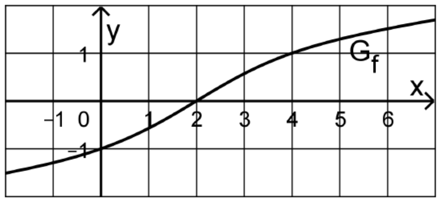


Abb. 2

Betrachtet wird die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g an und ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 diejenige Stelle x, für die $g'(x) = f'(x)$ gilt.

$$ID_g =]2; +\infty[$$

$$g(x) = \ln\big(f(x)\big) \rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = f'(x) \leftrightarrow f(x) = 1 \leftrightarrow x = 4$$

Der gesuchte x-Wert besitzt den Wert 4.

4 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

… siehe Aufgabengruppe 1

Stochastik

Aufgabengruppe 1

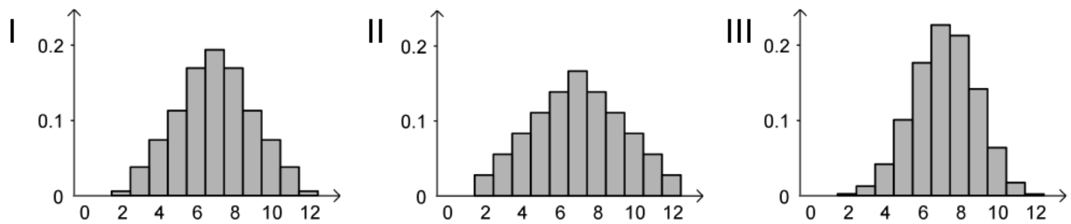
Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = 10)$ übereinstimmt.

Die Anzahl der Ereignisse, die zur 4 führen ({1;3), (2;2), (3;1)}) entspricht der Anzahl der Ereignisse, die zur 10 führen ({(4;6), (5;5), (6;4)}). Da alle Elementarereignisse des Experiments „Zweimaliges Werfen eines fairen Würfels unter Berücksichtigung der Reihenfolge der geworfenen Zahlen“ gleichwahrscheinlich sind, gilt dies ebenfalls für die Ereignisse 4 und 10.

b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

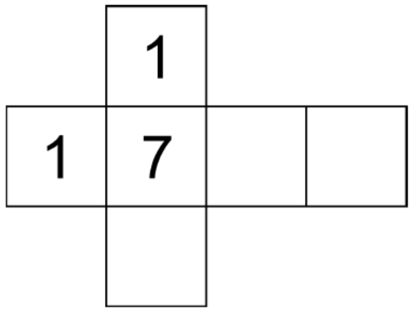


- III gehört zu einer Binomialverteilung mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit für Treffer und Niete (unsymmetrisch). Daher gehört dieses Diagramm der Zufallsgröße Y.
- Da die Beträge der Abstände zwischen den Wahrscheinlichkeiten benachbarter Zahlen bei X stets gleich sind (nämlich $^1/_{18}$), gehört II zur Zufallsgröße X.

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels, von dem nur drei Seiten beschriftet sind.



a) Der Würfel wird so lange geworfen, bis die Zahl 1 zum ersten Mal erzielt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau viermal gewürfelt wird.

Das Ereignis E: „Es wird genau viermal gewürfelt“ bedeutet: Es fällt dreimal nacheinander nicht die Eins, dann kommt die Eins,… und damit:

$$P(E) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

b) Die drei leeren Seiten des Würfels sollen jeweils mit einer positiven geraden Zahl beschriftet werden. Ermitteln Sie eine Möglichkeit für die Beschriftung dieser drei Seiten, sodass bei einmaligem Werfen des Würfels der Erwartungswert für die erzielte Zahl $\frac{31}{6}$ beträgt.

Es sei X die Zufallsvariable „Augenzahl auf der Würfelseite“

$$E(x) = 1 \cdot \frac{2}{6} + 7 \cdot \frac{1}{6} + a \cdot \frac{1}{6} + b \cdot \frac{1}{6} + c \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2} + \frac{a+b+c}{6} = \frac{31}{6}$$

$$\leftrightarrow \frac{a+b+c}{6} = \frac{22}{6} \leftrightarrow a+b+c = 22 \overset{z.B.}{\Longrightarrow} a = 6\,, b = 4\,, c = 12$$

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Gegeben ist die Kugel K mit Mittelpunkt $M(3\,|\,-6\,|\,5)$ und Radius $2\sqrt{6}$.

a) Geben Sie eine Gleichung von K in Koordinatenform an und zeigen Sie, dass der Punkt $P(5\,|\,-4\,|\,1)$ auf K liegt.

Koordinatenform der Kugelgleichung:

$$K\colon \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}\right]^2 = 24 \qquad allg. \quad K\colon \left[\vec{X} - \vec{m}\right]^2 = r^2$$

$$\rightarrow KF_K\colon \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 6)^2 + (x_3 - 5)^2 = 24$$

Einsetzen von P in KF_K:

$$(5-3)^2 + (-4+6)^2 + (1-5)^2 = 4 + 4 + 16 = 24 \quad (wahr)$$

P liegt auf der Kugelsphäre!

b) Untersuchen Sie, ob K die x_1x_2-Ebene schneidet.

K schneidet die x_1x_2 – Ebene, wenn der Abstand von M zur Ebene kleiner als der Kugelradius ist. Setzt man M in die $HNF_{x1x2 - Ebene}$ ein, so erhält man …

$$E := HNF_{x_1x_2-Ebene}\colon\ x_3 = 0$$

$$\rightarrow d(M;E) = 5 = 2 \cdot 2{,}5 = 2 \cdot \sqrt{6.25} > 2 \cdot \sqrt{6} = r$$

die Kugelschneidet also die Ebene nicht!

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

Verwende als Aufpunkt den Mittelpunkt der Strecke [PQ] und als Normalenvektor den Vektor von P nach Q …

$$NF_E\colon \begin{pmatrix}6\\0\\8\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \underbrace{\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}}_{A_E}\right] = 0 \leftrightarrow KF_E\colon 6 \cdot x_1 + 8 \cdot x_1 - 80 = 0$$

b) Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P. Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q. Bestimmen Sie die Koordinaten von R.

Wenn R doppelt so weit entfernt von S sein soll, wie P von Q, dann ist R auch doppelt so weit vom Aufpunkt A_E der Ebene entfernt wie P. Dann ergeben sich die Koordinaten von R (Überlegungsskizze selber machen …) durch:

$$\vec{R} = \vec{A}_E + 2 \cdot \overrightarrow{A_E P} \to \vec{R} = \begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix} + 2 \cdot \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\to R(-2;\,2;\,-1)$$

Prüfungsteil B

Analysis
Aufgabengruppe 1

Geg.: $f(x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot x - x^2}$ mit ID_f = [0; 10]

a) Nullstellen:

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot x - x^2} = 2 \cdot \sqrt{(10 - x) \cdot x} = 0 \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

b) Extremstelle:

$$f'(x) = -4 \cdot \frac{x-5}{2 \cdot \sqrt{10 \cdot x - x^2}} = -2 \cdot \frac{x-5}{\sqrt{10 \cdot x - x^2}} = 0 \to x_3 = 5 \to E(5; 10)$$

Es handelt sich um einen Hochpunkt, weil die y-Koordinate positiv ist und sich der Punkt zwischen den Schnittpunkten von f mit der x-Achse befindet.

c) Ist G_f rechtsgekrümmt auf ID_f, dann muss die zweite Ableitung auf ID_f negativ sein! Dies erfüllt nur der Term I.

d) Umformung:

$$f(5 - x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot (5 - x) - (5 - x)^2} = 2 \cdot \sqrt{-x^2 + 25}$$
$$f(5 + x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot (5 + x) - (5 + x)^2} = 2 \cdot \sqrt{-x^2 - 25}$$
$$f(5 - x) = f(5 + x)$$

Die Funktionswerte, die um den Betrag von x von der Geraden x = 5 abweichen sind gleich; daraus folgt die Achsensymmetrie!

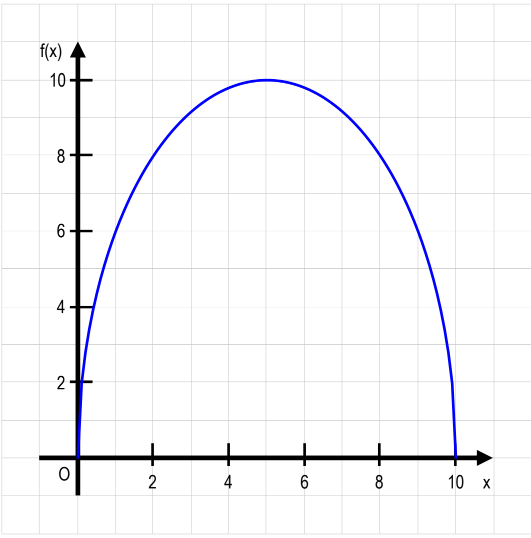
e) $ID_{f'}$:

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{x-5}{\sqrt{10 \cdot x - x^2}} \quad mit\ ID_{f'} =]0; 10[$$
$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left[-2 \cdot \frac{x-5}{\sqrt{10 \cdot x - x^2}} \right] \to +\infty$$

Die positive y-Achse ist Halbtangente an den Graphen G_f.

f) f(8) = 4

Graph siehe rechts …



g) Winkelgröße:

$$\tan \varphi = f'(2) = -2 \cdot \frac{-3}{4} = \frac{3}{2} \to \varphi = 56{,}31°$$

h) Das Rechteck besitzt die Grundseite $l = 10 - 2 \cdot s$ und die Breite $b = f(s) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot s - s^2}$.
Damit ergibt sich für die Diagonalen d nach Pythagoras:

$$d^2 = l^2 + b^2 =$$
$$(10 - 2 \cdot s)^2 + \left[2 \cdot \sqrt{10 \cdot s - s^2}\right]^2 =$$
$$100 - 40 \cdot s + 4 \cdot s^2 + 4 \cdot (10 \cdot s - s^2) =$$
$$100 - 40 \cdot s + 4 \cdot s^2 + 40 \cdot s - 4 \cdot s^2 = 100$$
$$\to d = \sqrt{100} = 10$$