Analysis

Aufgabengruppe 1

zu Aufgabe 1:

f ist umkehrbar, wenn strenge Monotonie vorliegt, d.h. die erste Ableitung auf ID_f keine Nullstellen besitzt.

$$f(x) = e^{2x+1} \rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^{2x+1} > 0 \; für \; alle \; x \in IR$$

Umkehrfunktion: Vertausche x mit y = f(x) und löse nach y auf …

$$x = e^{2y+1} \leftrightarrow \ln x = 2y + 1 \leftrightarrow y = \frac{\ln x - 1}{2} = f^{-1}(x)$$

zu Aufgabe 2:

a) $g(x) = x \cdot \underbrace{(x-9)}_{9 \notin ID_g} \cdot \sqrt{2-x} \rightarrow ID_g =]-\infty; 2]; \;\; N_1(0;0), \;\; N_2(2;0)$

b) $h(x) = \ln \frac{1}{x^2+1} \rightarrow ID_h = IR \quad h'(x) = -\frac{2 \cdot x}{x^2+1} = 0 \leftrightarrow x = 0$

$$h''(x) = -\frac{2 - 2 \cdot x^2}{(x^2+1)^2} \rightarrow h''(0) = -\frac{2}{1} < 0 \rightarrow M(0;0) \; ist \; globales \; Max.$$

Da die Logartihmusfunktion für x gegen Null gegen „- ∞“ strebt ist die Wertemenge das angegebene Intervall.

zu Aufgabe 3:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}} \rightarrow F(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \;\; oder \; Ableiten \; von \; F(x) \ldots$

b) $\int_1^b f(x)dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = 2 - \frac{2}{\sqrt{b}} = 1 \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{b}} = 1 \leftrightarrow \sqrt{b} = 2 \rightarrow b = 4$

zu Aufgabe 4:

a) $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^3 \quad Q_a\left(a; \frac{1}{8} \cdot a^3\right); \;\; P(0;2);$

$$m_a = \frac{\frac{1}{8} \cdot a^3 - 2}{a} = \frac{1}{8} \cdot a^2 - \frac{2}{a} = \frac{a^3 - 16}{8 \cdot a}$$

b) $m_t \; im \; Punkt \; Q$:

$$f'(a) = \frac{3}{8} \cdot a^2 = m_{t,Q} \qquad y = \left(\frac{3}{8} \cdot a^2\right) \cdot x + 2$$

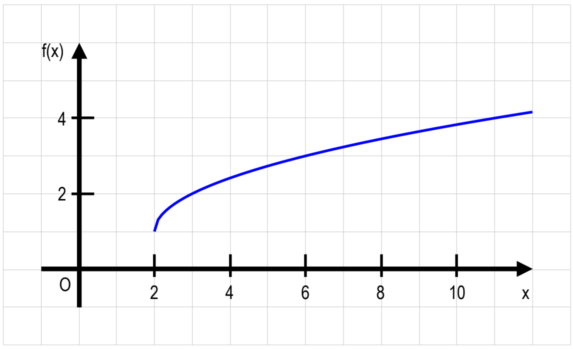
$$Q \;\; in \;\; y: \; \frac{1}{8} \cdot a^3 = \frac{3}{8} \cdot a^3 + 2 \leftrightarrow -\frac{1}{4} \cdot a^3 = 2 \leftrightarrow a = -2;$$

$$Q_{-2}(-2; \; -1)$$

Analysis
Aufgabengruppe 2

zu Aufgabe 1:

a) $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$



b)

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \left(\sqrt{x-2} + 1\right)dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x-2)^3} + x\right]_2^3 = \frac{5}{3};$$

zu Aufgabe 2:

a) $p(x) = -x^2 + 1$

b) $h(x) = e^x + 3$

zu Aufgabe 3:

a) Ableitung von p bilden. p´(2) liefert die Steigung m_t der Tangenten. m_t und die Koordinaten von Q in die allgemeine Geradengleichung einsetzen und t berechnen. m_t und t in die allgemeine Geradengleichung einsetzen – fertig!

b)

$$h(x) = ax^2 + c; \;\; N(1;0); \;\; t_N\colon\; y = -x + 1$$

$$\left.\begin{array}{r} h(1) = a + c = 0 \\ h´(1) = 2a = -1 \end{array}\right\} \to h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

zu Aufgabe 4:

a) x = 1 ist (einzige) Nullstelle von G_f; da man nicht durch Null dividieren kann gilt $ID_g = IR\backslash\{1\}$.

$$g(-2) = \frac{1}{f(-2)} = \frac{1}{3};$$

b) Schnittpunkte der Graphen:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \leftrightarrow g(x) = f(x) \to [f(x)]^2 = 1 \to f(x) = \pm 1 \to \begin{cases} x_1 \approx 0{,}6 \\ x_2 \approx 1{,}3 \end{cases}$$

Stochastik

Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2

zu a)

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50	0,80	0,95	1,00

zu b)

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^5 = 0{,}05 \rightarrow q = \sqrt[5]{0{,}05}$$

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^4 = 0{,}15 \rightarrow p = \frac{0{,}15}{0{,}05 \cdot 5} \cdot \sqrt[5]{0{,}05} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[5]{0{,}05}$$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \sqrt[5]{0{,}05}\right)^2 \cdot \sqrt[5]{0{,}05}^3 = 10 \cdot \frac{9}{25} \cdot 0{,}05 = \frac{90}{500} = 0{,}18 \neq 0{,}3$$

oder: Ist eine Binomialverteilung symmetrisch, gilt: p = q = 0,5. Das ist hier nicht der Fall!

Geometrie
Aufgabengruppe 1

zu a)

Geradengleichungen:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$$

Hilfsebene E:

$$E: \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0 \to 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 6 = 0$$

g in E: $3 \cdot (1 + \mu \cdot 3) + 4 \cdot (7 + \mu \cdot 4) - 6 = 25 + \mu \cdot 25 = 0 \to \mu = -1$

$$\to B(-2; 3; 2)$$

zu b)

$$\to d(g;h) = d(A;B) = \left|\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{29}$$

Geometrie
Aufgabengruppe 2

Geradengleichungen des Laserstrahls:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix}104\\-42\\10\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-13\\5\\1\end{pmatrix}$$

Rundes Verkehrsschild in der x_2x_3-Ebene (x_1 Koordinate ist damit Null) mit Radius 3:

$$K: \left[\vec{X} - \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}}_{\vec{s}}\right]^2 = 9 \qquad allg. \quad K: \left[\vec{X} - \vec{m}\right]^2 = r^2 \to KF_K: \quad {x_2}^2 + (x_3 - 20)^2 = 9$$

Schnittpunkt S von g mit der x_2x_3-Ebene:

$$E := HNF_{x_2x_3-Ebene}: \; x_1 = 0 \to 104 - 13 \cdot \mu = 0 \leftrightarrow \mu = 8 \to S(0;\; -2; 18)$$

$$\to d(M;S) = \left|\begin{pmatrix}0\\-2\\18\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{8} < 3$$

Jawollja, der Laserstrahl trifft das Schild!