

Mathematik

Abiturprüfung 2023

Nachtermin

Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Alle Aufgaben aus den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie müssen bearbeitet werden.

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

BE

Eine Spielzeugrakete besteht aus dem eigentlichen Modell der Rakete und einem Treibsatz, der diese senkrecht nach oben befördert und dabei komplett abbrennt.

- 1 Während die Rakete nach oben steigt, ändert sich aufgrund der Verbrennung des Treibstoffs ihre Gesamtmasse. Die Änderungsrate der Gesamtmasse (in Gramm) kann durch die Funktion

$$f: x \mapsto 5x - 10 \quad \text{mit} \quad D_f = [0; 2]$$

beschrieben werden, wobei x die Zeit in Sekunden seit dem Start darstellt. Die Brenndauer des Treibsatzes beträgt 2s.

- 3 a) Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)dx$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- 2 b) Die Funktion $m: x \mapsto 2,5x^2 - 10x + 30$ mit $0 \leq x \leq 2$ gibt die Gesamtmasse m (in Gramm) in Abhängigkeit von der Zeit x (in Sekunden) seit dem Start an. Zeigen Sie, dass die Funktion m eine Stammfunktion der Funktion f ist und berechnen Sie die Gesamtmasse der Rakete nach dem Verbrennen des gesamten Treibstoffs.

- 2 Gegeben ist weiterhin die Funktion $v: x \mapsto 200 \cdot \ln \frac{30}{x}$.

- 4 a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge an und ermitteln Sie das Monotonieverhalten der Funktion v .

Vernachlässigt man den Luftwiderstand und die Gravitation, so kann die Änderungsrate der Höhe (deutbar als Geschwindigkeit) der Rakete (in $\frac{m}{s}$) in Abhängigkeit von ihrer Gesamtmasse x (in Gramm) durch die Funktion v beschrieben werden.

- 3 b) Geben Sie $\lim_{x \rightarrow 0} v(x)$ an.

Erläutern Sie die theoretische Bedeutung dieses Grenzwerts im Sachzusammenhang und begründen Sie, weshalb Werte von x nahe 0 in der Praxis nicht sinnvoll sind.

- 3 c) Berechnen Sie, bei welcher Gesamtmasse die Rakete unter diesen Voraussetzungen eine Geschwindigkeit von $20 \frac{m}{s}$ hat.

(Fortsetzung nächste Seite)

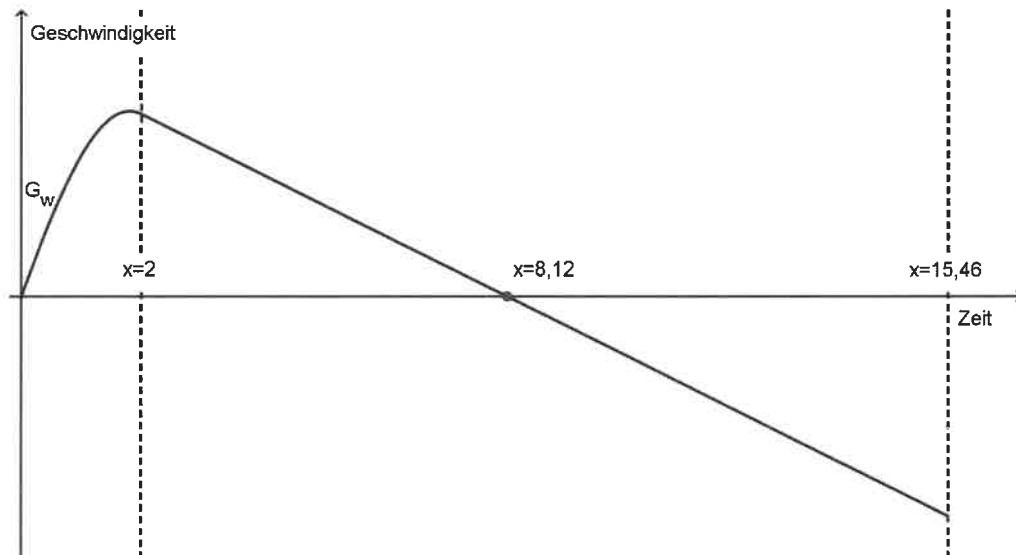
- 3 Berücksichtigt man den Einfluss der Gravitation, wird die Geschwindigkeit (in $\frac{m}{s}$) der Rakete in Abhängigkeit von der Zeit x (in Sekunden) vom Startzeitpunkt bis zum Zeitpunkt $x = 2$ durch den Funktionsterm

$$w: x \mapsto 200 \cdot \ln\left(\frac{30}{2,5x^2 - 10x + 30}\right) - 10x \quad \text{mit } x \in [0; 2]$$

beschrieben.

- 3 a) Die Funktion w setzt sich aus den Funktionen m , v und einer Funktion g zusammen. Geben Sie den Funktionsterm der linearen Funktion g an und drücken Sie die Funktion w als Verkettung bzw. Verknüpfung der Funktionen m , g und v aus.
- 2 b) Ermitteln Sie rechnerisch die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit der Rakete im Intervall $[0; 2]$.

In der Abbildung ist für $x \leq 2$ der Verlauf des Graphen der Funktion w skizziert. Für $x \geq 2$ sinkt die „Geschwindigkeit“ linear aufgrund der nunmehr ausschließlich wirkenden Gravitation.



- 4 c) Weisen Sie nach, dass der Graph der Ableitungsfunktion von w durch den folgenden Term festgelegt ist: $w': x \mapsto -400 \cdot \frac{x-2}{x^2-4x+12} - 10$.
- 4 d) Lesen Sie den ungefähren Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit der Rakete maximal ist, zunächst aus der Abbildung ab. Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt anschließend mit Hilfe von w' rechnerisch.
- 3 e) Weisen Sie nach, dass die Tangente an den Graphen der Funktion w an der Stelle $x = 2$ die folgende Gleichung besitzt:

$$y = -10x + 200 \cdot \ln 1,5$$

(Fortsetzung nächste Seite)

5

f) Beschreiben Sie den Verlauf der Flughöhe der Rakete anhand der Abbildung in Worten. Deuten Sie insbesondere die Nullstelle der Tangente im Sachzusammenhang.

4

g) Die Rakete schlägt ca. 15,46 Sekunden nach dem Start wieder auf derselben Stelle am Boden auf. Bestimmen Sie rechnerisch einen geeigneten Näherungswert für die maximale Flughöhe der Rakete.

40

BE

1 Im Jahr 2021 waren laut statistischem Bundesamt insgesamt 480184 Personen an einem Straßenverkehrsunfall mit Personenschaden beteiligt. 2,9% der Beteiligten waren alkoholisiert, 1862 der Beteiligten waren alkoholisiert und weiblich. Insgesamt waren 161099 weibliche Personen an Straßenverkehrsunfällen mit Personenschäden beteiligt.

Innerhalb von Ortschaften waren 333402 Personen, davon 9387 unter Alkoholeinfluss, an einem Straßenverkehrsunfall mit Personenschaden beteiligt.

Aus den erfassten Daten wird eine an einem Straßenverkehrsunfall mit Personenschaden beteiligte Person zufällig ausgewählt.

4

a) Ermitteln Sie

- die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person weder alkoholisiert noch weiblich war,
- die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese nicht alkoholisierte Person weiblich war.

3

b) Überprüfen Sie, ob die folgenden Ereignisse A und I stochastisch unabhängig sind:

A : „Die beteiligte Person ist alkoholisiert.“

I : „Die ausgewählte Person war innerorts beteiligt.“

2 Bei genauerer Analyse ergab sich, dass von allen Straßenverkehrsunfällen mit Personenschaden der Anteil der Unfälle unter Alkoholeinfluss 5,3% beträgt.

4

a) Ermitteln Sie, wie viele Verkehrsunfälle mit Personenschaden mindestens untersucht werden müssen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% mindestens ein Unfall unter Alkoholeinfluss beteiligt ist.

Speziell samstags beträgt der Anteil der Unfälle unter Alkoholeinfluss an allen an diesem Wochentag stattfindenden Unfällen mit Personenschäden 10,5%.

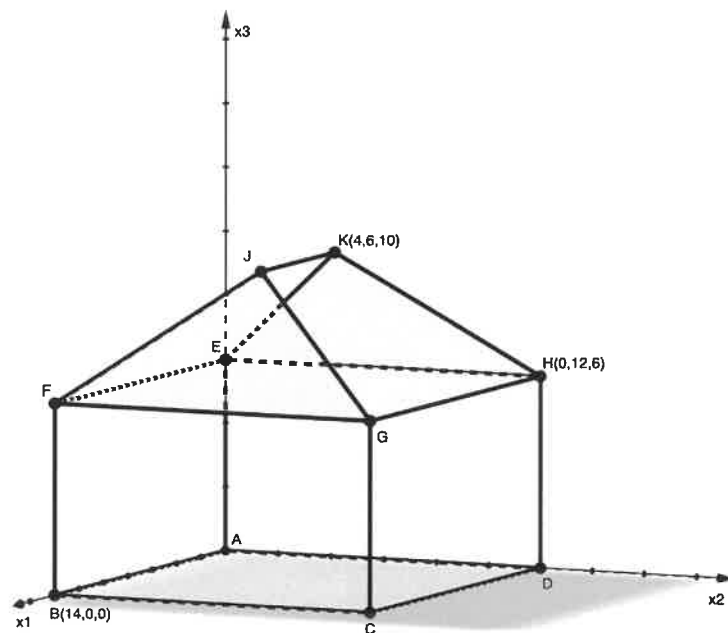
2

b) Ein Verkehrsmagazin folgert daraus, dass an Samstagen in etwa doppelt so viele Unfälle unter Alkoholeinfluss wie an den restlichen Wochentagen stattfanden. Nehmen Sie zu dieser Behauptung Stellung, indem Sie begründen, ob diese korrekt ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 3 Der Stadtrat, der sich für den Ausbau und die Förderung des öffentlichen Nahverkehrs einsetzt, bedauert aber die gerade von jungen Erwachsenen bemängelte Unpünktlichkeit der Busse. Das Busunternehmen hingegen gibt auf seiner Homepage bekannt, dass im Jahr 2021 etwa 80% seiner Busse pünktlich waren. Es sollen mehrere Busse nacheinander unabhängig voneinander untersucht werden.
- 5 a) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der pünktlichen Busse. Bestimmen Sie $P_{0,80}^{200}(|X - E(X)| \leq 2 \cdot \sqrt{\text{Var}(X)})$ und beschreiben Sie die Bedeutung dieses Terms im Sachzusammenhang.
- 4 b) Der Stadtrat überprüft an einer repräsentativen Bushaltestelle die nacheinander und unabhängig voneinander einfahrenden Busse auf ihre Pünktlichkeit. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 30 untersuchten Bussen genau die ersten drei, insgesamt jedoch genau zehn Busse nicht pünktlich waren.
- 3 4 Der Busbetreiber führt zur Buchung und Bezahlung eine neue App ein. Die Monatsfahrkarte soll dort als Anreiz zunächst 3,20 € günstiger als bisher sein. Die Monatsfahrkarten am Automaten sollen hingegen um 2,10 € teurer werden. Aufgrund einer repräsentativen Umfrage geht das Busunternehmen davon aus, dass 30% der Kunden ihre Monatsfahrkarte weiterhin am Automaten lösen werden, 50% das Angebot der App nutzen werden und der Rest beim Fahrer direkt seine Karte kaufen wird.
- Ermitteln Sie, um welchen Betrag sich der Preis für eine Monatsfahrkarte beim Fahrer erhöhen muss, wenn das Unternehmen davon ausgeht, dass sich die Käuferzahl der Monatsfahrkarten nicht verändern wird, und die Gesamteinnahmen für die ~~Wochenkarten~~ **Monatskarten** unverändert bleiben sollen.

Die Abbildung zeigt ein Haus mit quaderförmigem Unterteil und einem symmetrischen Walmdach, welches auf einer horizontalen Fläche gebaut werden soll. Zwei Dachflächen sind trapezförmig, die beiden anderen haben jeweils die Form eines Dreiecks. Das Dach soll neu gedeckt werden. Um den neuen Energiebestimmungen gerecht zu werden, hat man sich entschieden das Dach mit neuartigen Photovoltaikziegeln zu decken. Hier sind die Photovoltaikzellen gleich in die Ziegel eingebaut, man benötigt also keine extra Anlage auf dem Dach. Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung. Weiterhin sind $G(14|12|6)$ und $J(10|6|10)$ sowie die im Koordinatensystem abgebildeten Punkte gegeben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.



- 2 a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte E und F an.
- 4 b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_T , die die Punkte G , H und J enthält, in Koordinatenform.
(Zur Kontrolle: $E_T: 2x_2 + 3x_3 = 42$)
- 3 c) Zeigen Sie, dass es sich beim in der Ebene E_T liegenden Viereck $GHKJ$ um ein symmetrisches Trapez handelt.

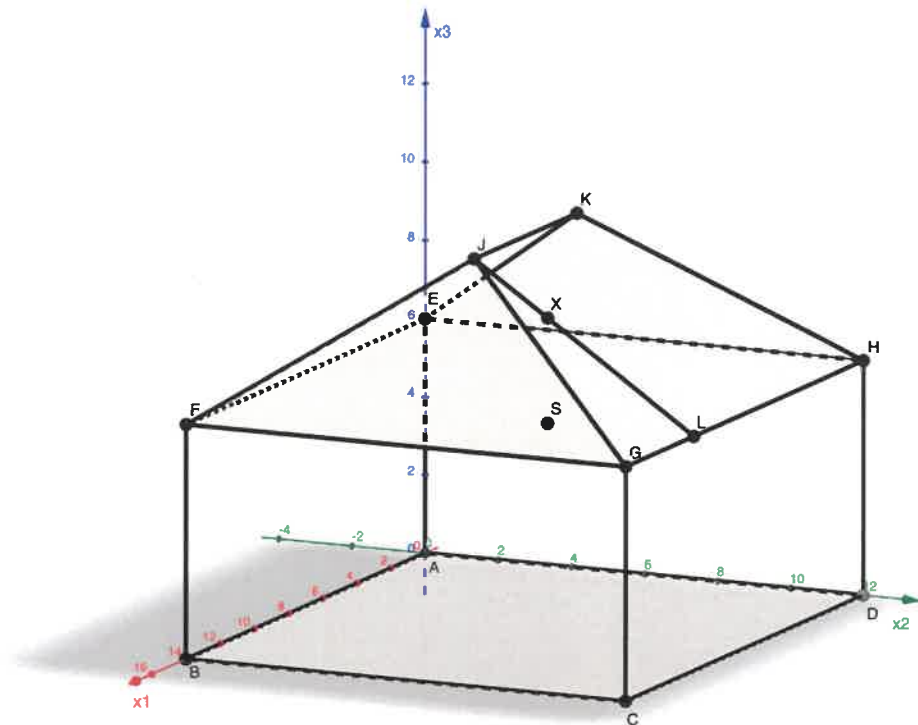
Jeweils eine Trapezfläche und eine Dreiecksfläche sollen mit Photovoltaikziegel belegt werden. Um eine solche Photovoltaikanlage optimal betreiben zu können, sollte die Dachneigung zwischen 30° und 35° betragen. Wenn die Dachseite nach Süden zeigt, kann der Neigungswinkel auch von diesen Werten abweichen.

(Fortsetzung nächste Seite)

5

- d) Berechnen Sie die Neigungswinkel der beiden zu belegenden Dachflächen. Beurteilen Sie im Anschluss, wie der Neubau ausgerichtet werden muss, damit die Photovoltaikanlage optimal arbeiten kann.

An einem Holzbalken, der durch die Strecke $[JL]$ modelliert wird, soll eine Hängelampe mit kugelförmigem Lampenschirm im Dachgeschoss so aufgehängt werden, dass der Mittelpunkt R des Lampenschirms sich genau über dem Punkt $S(10|8|6)$ befindet. Der Radius des Lampenschirms beträgt 0,2 Meter.



4

- e) Begründen Sie mit Hilfe einer geeigneten Skizze unter Benutzung des Strahlensatzes, dass der Aufhängepunkt an der Stütze der Punkt $X(10|8|8\frac{2}{3})$ sein muss.

3

- f) Bestätigen Sie die Koordinaten von X aus Teilaufgabe e) rechnerisch unter Verwendung der Ebenengleichung aus Teilaufgabe b).

4

- g) Berechnen Sie die maximal mögliche Höhe des Lampenmittelpunktes R über dem Boden des Dachgeschosses, wenn die Lampe frei im Raum hängen soll, ohne die Dachfläche $GHIJ$ zu berühren.

25